

# Produto Funcional de Grafos

A. R. G. Lozano<sup>1</sup>, Departamento de Matemática da FFP-UERJ.  
Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades da UNIGRANRIO,  
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional.

A. S. Siqueira<sup>2</sup>, Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades  
da UNIGRANRIO, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional.

S. Jurkiewicz<sup>3</sup>, Programa de Engenharia da Produção da COPPE-UFRJ.

C. V. P. Friedmann<sup>4</sup>, Departamento de Matemática da FFP-UERJ.  
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional.

**Resumo.** O trabalho apresenta uma generalização do produto cartesiano de grafos que denominamos de produto funcional de grafos. Provam-se algumas propriedades do novo produto e mostra-se uma aplicação do mesmo, que consiste em gerar grafos regulares que admitem coloração com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores.

**Palavras-chave.** Produto funcional de grafos, Coloração com folga, Grafo suporte.

## 1. Introdução

Em 2008 Lozano, Jurkiewicz e Friedmann [9] apresentaram um algoritmo para troca completa de informações que não dependia da topologia da rede. Para isto, usaram a coloração total equilibrada dos grafos correspondentes às topologias mais comuns e mostraram que tais colorações satisfaziam a Conjectura de Vizing, ou seja, os grafos podiam ser coloridos totalmente com, no máximo,  $\Delta + 2$  cores. Posteriormente Lozano, Siqueira e Jurkiewicz [13] provaram que, se um grafo regular pode ser colorido com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores então a coloração de vértices pode ser completada obtendo-se uma coloração total equilibrada com, no máximo,  $\Delta + 2$  cores. O resultado acima citado serviu como motivação para estudar a possibilidade de se construir famílias de grafos regulares com as características mencionadas. Para auxiliar nesta construção, introduziu-se o conceito de produto funcional de grafos e suas propriedades, que são explorados na terceira seção deste artigo. Em seguida apresentamos uma das maneiras de obter estas famílias de grafos regulares usando

---

<sup>1</sup>arglozano@terra.com.br

<sup>2</sup>asiqueira@unigranrio.com.br

<sup>3</sup>jurki@pep.ufrj.br

<sup>4</sup>cliciavp@terra.com.br

o produto funcional, e finalizamos com uma seção onde são expostas as perspectivas de trabalhos futuros. Neste texto, os grafos são simples, não orientados e sem laços.

## 2. Definições básicas e notações

Ao longo do artigo serão usadas as notações listadas a seguir:

- $\{u, v\}$  ou  $uv$  denota uma aresta do grafo  $G$ , onde  $u$  e  $v$  são adjacentes;
- $d_G(v)$  ou  $d(v)$  se não houver ambiguidade, denota o grau do vértice  $v$  no grafo  $G$ ;
- $\Delta(G)$  ou  $\Delta$  se não houver ambiguidade, denota o grau máximo do grafo  $G$ ;
- $N_G(v)$  ou  $N(v)$  se não houver ambiguidade, denota o conjunto de os todos vértices adjacentes ao vértice  $v$  no grafo  $G$ ;
- $F(X)$  denota o conjunto de todas as bijeções de  $X$  em  $X$ ;
- $D(G)$  denota o digrafo obtido pela substituição de cada aresta  $uv$  do grafo  $G$  pelos arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$ , mantendo o mesmo conjunto de vértices;
- $\mathcal{D}$  denota o conjunto dos digrafos que satisfazem as seguintes condições:
  1.  $(u, v)$  é um arco do digrafo se, e somente se,  $(v, u)$  também é um arco do digrafo,
  2. Não existem dois arcos iguais.
- Se  $\vec{G} \in \mathcal{D}$ ,  $G(\vec{G})$  denota o grafo obtido pela substituição de cada par de arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$  de  $\vec{G}$  pela aresta  $uv$ , mantendo o mesmo conjunto de vértices;
- $I_n$  denota o conjunto de números naturais  $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n - 1\}$ ;
- Se  $A$  é um conjunto,  $|A|$  denota a cardinalidade de  $A$ ;
- $E(X)$  ou  $E$  se não houver ambiguidade, denota o conjunto de arestas (arcos) do grafo (digrafo)  $X$ ;
- $V(X)$  ou  $V$  se não houver ambiguidade, denota o conjunto de vértices do grafo (digrafo)  $X$ ;
- $C_n$  denota o ciclo de  $n$  vértices;
- $K_n$  denota o grafo completo de  $n$  vértices.

**Definição 2.1.** [3] *Sejam um grafo  $G(V, E)$ , um conjunto  $S \subset (E \cup V)$ , um número natural  $k$  e um conjunto arbitrário  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  cujos elementos são denominados de cores. Uma **coloração** do grafo  $G$  com as cores de  $C$  é uma aplicação  $f : S \rightarrow C$ .*

Na definição acima, se  $S = V$  então tem-se uma **coloração de vértices**. No caso de  $S = E$ , trata-se de uma **coloração de arestas** e finalmente, se  $S = E \cup V$ , então  $f$  é uma **coloração total**. Se  $x \in S$  e  $f(x) = c_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , diz-se que  $x$  possui ou está colorido com a cor  $c_i$ .

**Definição 2.2.** [3] *Sejam um grafo  $G(V, E)$ , um conjunto  $S \subset (E \cup V)$  e um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , onde  $k$  é um número natural. Uma coloração  $f : S \rightarrow C$  do grafo  $G$  com as cores de  $C$  é uma **coloração própria**, se para todo par  $x, y \in S$  tem-se que, se  $x$  é adjacente ou incidente a  $y$  então  $f(x) \neq f(y)$ .*

Deste ponto em diante, todas as colorações neste trabalho serão consideradas próprias e sobrejetivas, a menos que explicitamente se especifique o contrário.

**Definição 2.3.** [16] *Dados um grafo  $G(V, E)$ , um conjunto  $S \subset (E \cup V)$  e um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , onde  $k$  é um número natural. Uma coloração  $f : S \rightarrow C$  do grafo  $G$  com as cores de  $C$  é uma **coloração equilibrada**, se para todo par  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  tem-se que,  $||f^{-1}(c_i)| - |f^{-1}(c_j)|| \leq 1$ , sendo  $|f^{-1}(c_i)|$  e  $|f^{-1}(c_j)|$  as cardinalidades dos conjuntos dos elementos de  $S$  que possuem as cores  $c_i$  e  $c_j$ , respectivamente.*

**Definição 2.4.** [5] *Sejam um grafo  $G(V, E)$ , um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , onde  $k$  é um número natural, e um número natural  $p$ , tal que  $p \leq \Delta(G)$ . Uma aplicação  $f : S \rightarrow C$  é uma **coloração de vértices** do grafo  $G$  com as cores de  $C$  **com folga**  $p$ , se para todo  $v \in V$  tem-se que se  $d(v) < p$ , então  $|c(N(v))| = d(v)$ , caso contrário,  $|c(N(v))| = p$ , sendo  $|c(N(v))|$  a cardinalidade do conjunto das cores da vizinhança de  $v$ .*

**Definição 2.5.** [16] *Um grafo  $G$  é de **classe 1** se admite uma coloração própria de arestas com  $\Delta(G)$  cores, caso contrário é de **classe 2**.*

### 3. Produto funcional de grafos

Nesta seção é apresentada a definição de produto funcional de grafos, para este fim, é necessário definir aplicações, denominadas aplicações de ligação, que associam cada aresta de um fator com uma bijeção definida no conjunto de vértices do outro. Esta bijeção indica como será feita a ligação dos vértices do grafo produto. O produto cartesiano de grafos pode ser visto como um produto funcional, onde a todas as arestas são associadas à aplicação identidade correspondente.

**Definição 3.1.** *Os digrafos  $\vec{G}_1(V_1, E_1)$  e  $\vec{G}_2(V_2, E_2)$  são ditos **funcionalmente ligados** pelas aplicações  $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$  se  $f_1$  e  $f_2$  são tais que:*

1. *Se para todo arco  $(u, v) \in E_1$  se  $(v, u) \in E_1$ , então  $f_1((u, v)) = (f_1((v, u)))^{-1}$*
2. *Se para todo  $(x, y) \in E_2$  se  $(y, x) \in E_2$ , então  $f_2((x, y)) = (f_2((y, x)))^{-1}$*

3. Para todo par de arcos  $(u, v) \in E_1$  e  $(x, y) \in E_2$ , tem-se que  $f_2((x, y))(u) \neq v$  ou  $f_1((u, v))(x) \neq y$

As aplicações  $f_1$  e  $f_2$  são denominadas **aplicações de ligação**.

**Definição 3.2.** Sejam dois grafos  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$ . Se  $D(G_1)$  e  $D(G_2)$  são funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ , então os **grafos**  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  são ditos **funcionalmente ligados** pelas mesmas aplicações.

**Definição 3.3.** Sejam  $\vec{G}_1(V_1, E_1)$  e  $\vec{G}_2(V_2, E_2)$  **digrafos** funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$ . O **produto funcional** do digrafo  $\vec{G}_1$  pelo digrafo  $\vec{G}_2$  segundo as aplicações  $f_1$  e  $f_2$ , denotado por  $(\vec{G}_1, f_1) \times (\vec{G}_2, f_2)$ , é o digrafo  $\vec{G}^*(V^*, E^*)$  definido por:

- $V^* = V_1 \times V_2$ .
- $((u, x), (v, y)) \in E^*$  se, e somente se, uma das seguintes condições for verdadeira:
  1.  $(u, v) \in E_1$  e  $f_1((u, v))(x) = y$
  2.  $(x, y) \in E_2$  e  $f_2((x, y))(u) = v$ .

A Figura 1 apresenta dois digrafos com suas respectivas aplicações de ligação e o digrafo obtido como resultado do produto de ambos os pares.

**Definição 3.4.** Sejam  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  **grafos** funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ . O **produto funcional** do grafo  $G_1$  pelo grafo  $G_2$ , denotado por  $(G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$ , é o grafo  $G(\vec{G}^*(V^*, E^*))$ , sendo  $\vec{G}^*(V^*, E^*) = (D(G_1), f_1) \times (D(G_2), f_2)$ .

É interessante notar que o Produto Cartesiano de Grafos é um caso particular do Produto Funcional de Grafos definido acima, quando  $f_1$  e  $f_2$  atribuem a identidade a todos os arcos dos digrafos correspondentes. A seguir será definido um tipo especial de bijeção, denominado rotação.

**Definição 3.5.** Dado um número natural  $n$ , uma **rotação em**  $I_n$  é uma bijeção  $f : I_n \rightarrow I_n$  definida como segue:

$$f(i) = (i + k)(\text{mod } n), \text{ onde o número natural } k \text{ é constante.}$$

**Definição 3.6.** Sejam  $n$  um número natural e  $A$  um conjunto finito tal que  $|A| = n$ . Uma bijeção  $f : A \rightarrow A$  é uma **rotação em**  $A$ , se existem, uma bijeção  $h : I_n \rightarrow A$  e uma rotação  $r$  em  $I_n$  tais que  $f(h(i)) = h(r(i))$ , para todo  $i \in I_n$ .

Observe que, na definição acima, se  $h(i)$  é representado por  $x_i$ , tem-se que  $f(h(i)) = h(r(i)) = x_{r(i)}$ . Isso significa que para conhecer a rotação, basta conhecer o valor em  $x_0$ . Neste texto  $r_i(A)$  denotará a rotação em  $A$  tal que  $r(h(0)) = h(i)$ .

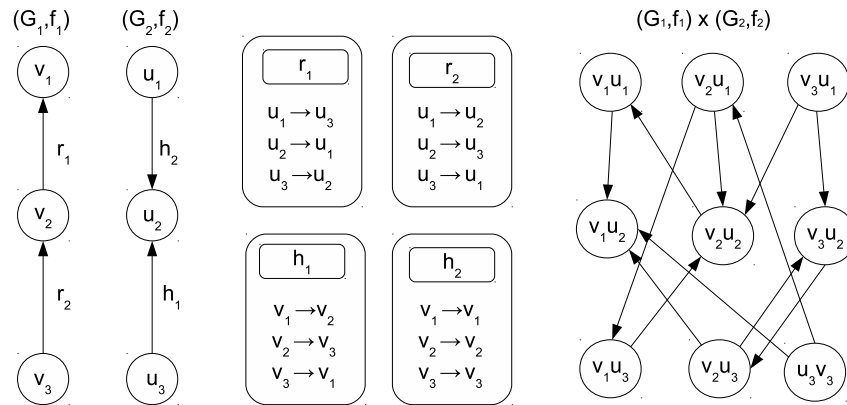


Figura 1: Produto funcional de dois digrafos

Se não existir ambiguidade, tal rotação será representada simplesmente por  $r_i$ .

A Figura 2 representa o produto funcional do caminho  $P_3$  por ele mesmo, associado a duas diferentes aplicações de ligação (as rotações  $r_1$  e  $r_2$ ). Na figura, cada vértice da forma  $(v_i, v_j)$  é representado por  $v_i v_j$  e as linhas descontínuas descrevem as arestas do produto cartesiano usual de grafos.

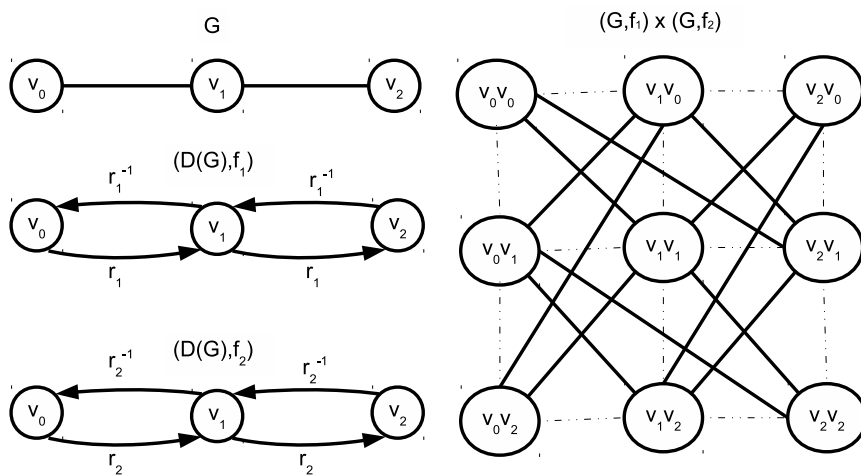


Figura 2: Produto funcional de dois grafos

Os teoremas a seguir mostram algumas propriedades do produto funcional.

**Teorema 3.1.** *Sejam  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  grafos funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ . Então os grafos  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  e  $G^{**}(V^{**}, E^{**}) = (G_2, f_2) \times (G_1, f_1)$  são isomorfos. Neste sentido, o produto funcional de grafos é comutativo.*

*Demonstração.* Sejam  $E'_1 = E(D(G_1))$  e  $E'_2 = E(D(G_2))$ . Provaremos que dados dois vértices  $(u, x) \in V^*$  e  $(v, y) \in V^*$ , então a aresta  $\{(u, x), (v, y)\} \in E^*$  se, e somente se, a aresta  $\{(x, u), (y, v)\} \in E^{**}$ . Tem-se que  $\{(u, x), (v, y)\} \in E^*$  se, e somente se:

- 1-  $(u, v) \in E'_1$  e  $f_1((u, v))(x) = y$  e  $(v, u) \in E'_1$  e  $f_1(v, u)(y) = (f_1((u, v)))^{-1}(y) = x$  ou
- 2-  $(x, y) \in E'_2$  e  $f_2((x, y))(u) = v$  e  $(y, x) \in E'_2$  e  $f_2(y, x)(v) = (f_2((x, y)))^{-1}(v) = u$ .

$\{(x, u), (y, v)\} \in E^{**}$  se, e somente se:

- 3-  $(x, y) \in E'_2$  e  $f_2((x, y))(u) = v$  e  $(y, x) \in E'_2$  e  $f_2(y, x)(v) = (f_2((x, y)))^{-1}(v) = u$  ou
- 4-  $(u, v) \in E'_1$  e  $f_1((u, v))(x) = y$  e  $(v, u) \in E'_1$  e  $f_1(v, u)(y) = (f_1((x, y)))^{-1}(y) = x$ .

Como 1 é equivalente a 4 e 2 é equivalente a 3 o teorema está provado.  $\square$

**Teorema 3.2.** *Sejam  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafos funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$ . Para todo vértice  $(u, x)$  do grafo  $G^* = (V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  tem-se que:  $d_{G^*}((u, x)) = d_{G_1}(u) + d_{G_2}(x)$ .*

*Demonstração.* Para cada  $(u, x) \in V^*$ , denota-se por  $E_{G^*}((u, x))$  o conjunto de arestas incidentes nesse vértice no grafo  $G^*$ . Constrói-se a aplicação  $h_1 : N_{G_1}(u) \rightarrow E_{G^*}((u, x))$  da seguinte forma:  $h_1(v) = \{(v, y), (u, x)\}$  onde  $y \in V_2$  é tal que  $f_1((u, v))(x) = y$  com  $(u, v) \in E(D(G_1))$ ;  $y$  existe pois  $f_1((u, v))$  é bijetiva. Por outro lado  $h_1$  é injetiva, pois se  $v_1, v_2 \in N_{G_1}(u)$  e  $v_1 \neq v_2$  então necessariamente  $(v_1, y_1)(u, x) \neq (v_2, y_2)(u, x)$  independentemente do valor de  $y_1$  e  $y_2$ . De forma semelhante, construímos  $h_2 : N_{G_2}(x) \rightarrow E_{G^*}((u, x))$ . Se uma aresta é incidente em  $(u, x)$  no grafo  $G^*$  ela tem a forma  $\{(u, x), (v, y)\}$  logo existe  $(u, v) \in E(D(G_1))$  tal que  $f_1((u, v))(x) = y$  ou  $(x, y) \in E(D(G_2))$  tal que  $f_2((x, y))(u) = v$ . Por construção de  $h_1$  e  $h_2$  tem-se que  $h_1(N_{G_1}(u)) \cup h_2(N_{G_2}(x)) = E_{G^*}((u, x))$ . Por outro lado, se  $\{(u, x), (v, y)\} \in h_1(N(u))$  e  $\{(u, x), (v, y)\} \in h_2(N(v))$  então existem arcos  $(u, v) \in E(D(G_1))$  e  $(x, y) \in E(D(G_2))$  tais que  $f_1((u, v))(x) = y$  e  $f_2((x, y))(u) = v$  o que contradiz a condição 3 da definição de aplicações de ligação logo,  $h_1(N_{G_1}(u)) \cap h_2(N_{G_2}(x)) = \emptyset$ . Podemos agora construir a bijeção

$$h : N_{G_1}(u) \cup N_{G_2}(x) \rightarrow E_{G^*}((u, x)), \text{ definida por } h(a) = \begin{cases} h_1(a) & \text{se } a \in N_{G_1}(u) \\ h_2(a) & \text{se } a \in N_{G_2}(x) \end{cases} .$$

O que conclui a prova do teorema.  $\square$

Do teorema anterior se obtém, de forma imediata, o seguinte corolário.

**Corolário 3.2.1.** *Sejam  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafos funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$ , então o grafo  $G^* = (V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  tem grau máximo  $\Delta(G^*) = \Delta(G_1) + \Delta(G_2)$ .*

Em relação à conexidade, o produto funcional de grafos conexos não é necessariamente conexo como mostra a Figura 3, mas também é possível obter um grafo conexo como resultado do produto funcional de dois grafos desconexos. O teorema abaixo oferece uma condição que garante a conexidade do grafo produto funcional, caso os fatores sejam conexos.

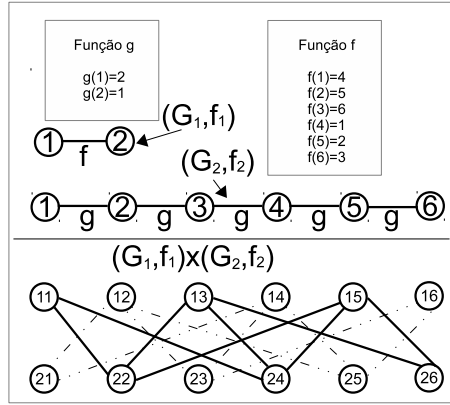


Figura 3: Produto funcional desconexo de dois grafos conexos

**Teorema 3.3.** *Dados dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  conexos e funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$ , se  $f_1$  ou  $f_2$  atribui a identidade a todos os arcos do digrafo correspondente, então o produto funcional de  $G_1$  por  $G_2$  segundo  $f_1$  e  $f_2$  é conexo.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponhamos que  $f_2$  atribui a identidade a todos os arcos de  $D(G_2)$ . Sejam  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$ ,  $(u, x)$  e  $(v, y)$  dois vértices de  $G^*$ . Como  $G_1$  é conexo, existe um caminho  $ux_1 \cdots x_p$  com  $x_p = v$  em  $G_1$ . Sejam agora  $z_1 = f_1((u, x_1))(x)$ ,  $z_{i+1} = f_1((x_i, x_{i+1}))(z_i)$ ,  $i = 1, \dots, p - 1$ , consequentemente existe um caminho  $P_1 = (u, x)(x_1, z_1)(x_2, z_2) \cdots (v, z_p)$  em  $G^*$ . Como  $G_2$  é conexo, existe um caminho  $z_p y_1 \cdots y_q$  com  $y_q = y$  em  $G_2$ , e como  $f_2(e)(v) = v$  para toda aresta  $e \in E_2$ , então  $P_2 = (v, z_p)(v, y_1) \cdots (v, y)$  é um caminho em  $G^*$ . A união de  $P_1$  e  $P_2$  proporciona um caminho entre  $(u, x)$  e  $(v, y)$ .  $\square$

O Produto Cartesiano de dois Grafos é conexo se, e somente se, ambos os fatores forem conexos, e para mais detalhes, pode-se consultar [15, 12]. Observe que esse resultado é uma consequência do teorema anterior, pois no Produto Cartesiano

de Grafos, as aplicações de ligação  $f_1$  e  $f_2$  atribuem a identidade a todos os arcos dos digrafos correspondentes. Esse teorema impõe uma condição forte sobre uma das aplicações de ligação para que o produto funcional seja conexo. Mas, neste artigo, tal condição é suficiente para construir famílias de grafos conexos que admitem coloração com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, que foi a motivação inicial para a introdução do produto funcional. De qualquer forma, uma proposta de trabalho futuro é determinar condições mais fracas para as aplicações de ligação.

## 4. Uma aplicação do produto funcional

Nesta seção, mostraremos alguns resultados relativos à construção de famílias de grafos regulares que admitem uma coloração com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores. Para um estudo mais detalhado, bem como outros resultados pode-se consultar [13]. Muitos grafos usados como grafos suporte para topologias de redes de interconexão, são obtidos mediante o produto cartesiano de grafos, como é o caso do hipercubo, mas nem sempre estes grafos admitem uma coloração com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores (como é o caso do toro  $C_3 \times C_5$ , ilustrado na Figura 4). Com uma modificação adequada, pode-se obter um grafo que admite a coloração desejada mantendo as características dos grafos suporte de redes (no que diz respeito à diâmetro, conexidade, regularidade, etc). As definições e teoremas a seguir exploram a ideia anterior.

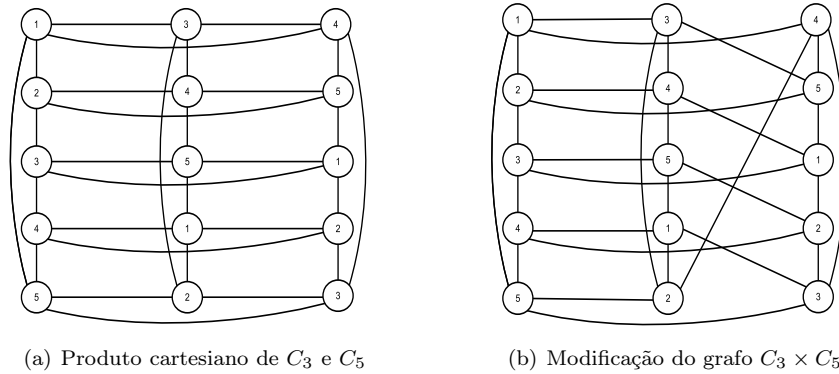


Figura 4:  $C_3 \times C_5$  e  $C_3 \times C_5$  modificado, coloridos com 5 “cores”

**Definição 4.1** (Grafo  $k$ -suporte). *Dado um número natural  $k$ ,  $k \geq 3$ , o grafo  $G = (V, E)$ , é um  $k$ -suporte se satisfaz as seguintes condições*

1.  $G$  é um grafo regular de grau  $k - 3$ ;
2. Existe uma aplicação  $f : E(G) \rightarrow F(I_k)$ , tal que  $G$  e  $C_k$  estão funcionalmente ligados por  $f$  e  $\mathbf{Id}$ , onde  $\mathbf{Id} : E(C_k) \rightarrow F(I_{|V|})$  é a aplicação que a cada arco de  $D(C_k)$  faz corresponder a função identidade;



3. O grafo  $G^* = (f_1, G) \times (\mathbf{Id}, C_k)$  pode ser colorido com folga  $\Delta(G^*)$  com  $\Delta(G^*) + 1$  cores.

**Teorema 4.1.** Se  $G(V, E)$  é um grafo  $k$ -regular de classe 1, então  $G$  é  $(k+3)$ -suporte.

*Demonstração.* Sejam  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $V(C_{k+3}) = \{u_0, u_1, \dots, u_{k+2}\}$ ,  $C = \{2, 3, 4, \dots, k+1\}$  um conjunto e  $c : E \rightarrow C$ , uma coloração de arestas de  $G$  usando o conjunto  $C$ . Dividiremos o restante da prova em dois casos:

**Caso 1.**  $k = \Delta(G)$  é par:

Denotamos por  $i'$  o número  $(k+3) - i$ , para todo  $i \in \{2, 3, \dots, (\frac{k}{2} + 1)\}$ . Veja agora que  $i + i' = 0 \pmod{k+3}$ , e que para cada par  $\{i, i'\}$  o subgrafo  $G_i(V_i, E_i)$  induzido pelo conjunto de arestas  $\{e \in E : c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\}$  é um grafo regular de grau 2 e que  $V = V_i$ . Logo, as componentes conexas de cada subgrafo  $G_i$ , são ciclos  $G_{i1}, \dots, G_{it_i}$ , onde  $t_i$  é um número natural,  $t_i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ , e cada ciclo  $G_{ij}$  está associado a dois ciclos orientados  $\vec{G}_{ij}^1$  e  $\vec{G}_{ij}^2$  em  $D(G)$ . Definimos as aplicações  $f_1 : E(D(G)) \rightarrow V(C_{\Delta+3})$ ,  $f_2 : E(D(C_{\Delta+3})) \rightarrow V$  como segue:

$$f_1(x) = \begin{cases} r_i & \text{se } x \in E(\vec{G}_{ij}^1); i \in \{2, 3, \dots, \frac{k}{2} + 1\}; j \in \{1, 2, \dots, t_i\} \\ r_{i'} & \text{se } x \in E(\vec{G}_{ij}^2); i \in \{2, 3, \dots, \frac{k}{2} + 1\}; j \in \{1, 2, \dots, t_i\} \end{cases}$$

$f_2(x) = Id(x)$  para todo arco  $x \in D(C_{\Delta+3})$ , onde  $Id$  representa a função identidade.

Sejam agora  $G^* = (f_1, G_1) \times (f_2, C_{k+3})$ ,  $V^* = V(G^*)$ ,  $E^* = E(G^*)$ . A coloração  $f : V^* \rightarrow \{0, 1, \dots, (k+2)\}$  definida por:  $f((v_i, u_j)) = j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots, (k+2)$  é uma coloração com folga  $\Delta(V^*)$  com  $\Delta(V^*) + 1$  "cores" do grafo  $G^*$ . O conjunto de "cores"  $\{0, 1, \dots, (k+2)\}$  possui  $k+3$  elementos e pelo corolário 3.2.1  $G^*$  é um grafo regular de grau  $\Delta(G) + \Delta(C_{k+3}) = k+2$ . Para analisar que a coloração tem folga  $\Delta(G^*)$ , observe que por simetria basta analisar um vértice de  $V^*$ , por exemplo  $(v_1, u_0)$ , seja  $N_G(v_1) = \{x_2, \dots, x_{k+1}\}$ , por facilidade e sem perder generalidade vamos supor que  $c(v_1 x_j) = j$ ,  $j \in \{2, \dots, k+1\}$  (na verdade cada aresta incidente a  $v_1$  possui uma cor diferente) então os extremos dos arcos de  $(f_1, \vec{G}_1) \times (f_2, \vec{C}_{\Delta+3})$  que tem como origem  $(v_1, u_0)$  são  $(v_1, u_1)$ ,  $(v_1, u_{k+2})$ ,  $(x_2, u_2)$ ,  $(x_3, u_3)$ ,  $(x_4, u_4)$ , ...,  $(x_{k+1}, u_{k+1})$  coloridos com as "cores"  $1, k+2, 2, 3, \dots, k+1$  respectivamente, logo a coloração possui folga  $\Delta$ .

**Caso 2.**  $k = \Delta(G)$  é ímpar:

Observe que  $2 + (k+1) = 3 + k = 4 + (k-1) \dots = (\frac{k-1}{2} + 1) + (\frac{k+3}{2} + 1) = (\frac{k+1}{2} + 1) + (\frac{k+1}{2} + 1) = k+3$ , e denotamos por  $i'$  o número  $(k+3) - i$ , para todo  $i \in \{2, 3, \dots, (\frac{k+1}{2} + 1)\}$ . Agora o subgrafo  $G_i(V_i, E_i)$  induzido pelo conjunto de arestas  $\{e \in E : c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\}$   $i \in \{2, 3, \dots, (\frac{k-1}{2} + 1)\}$  é um grafo regular de grau 2, e o subgrafo  $G_a$ , com  $a = \frac{k+1}{2} + 1$ , induzido pelo conjunto de arestas  $\{e \in E : c(e) = \frac{k+1}{2} + 1\}$  é um emparelhamento perfeito, e o raciocínio seguido no caso 1, é válido, o que prova o teorema.

□



$0 \pmod n$ , isto é,  $j = i' \pmod n$ , de onde segue imediatamente a propriedade. Para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , denotamos por  $e_i$  a aresta  $\{v_i, v_{i'}\}$ . Agora para cada par de cores  $\{i, i'\}$   $i \in \{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ , o subgrafo gerado pelo conjunto de arestas  $\{e \in E : c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\} \cup \{e_i\}$  é um grafo regular de grau 2 cujo conjunto de vértices é  $V$ , logo  $G$  foi decomposto em  $\frac{n-1}{2}$  grafos 2-regulares e podemos utilizar o mesmo raciocínio do teorema 4.1, usando as rotações  $r_2, r_3, \dots, r_{\frac{n+3}{2}}$  e suas inversas definidas em  $I_{n+2}$  nos respectivos ciclos orientados.  $\square$

A figura 6 mostra um  $K_3$  sendo usado como 5-suporte. Novamente foram omitidas as arestas não adjacentes a vértices rotulados com 0.

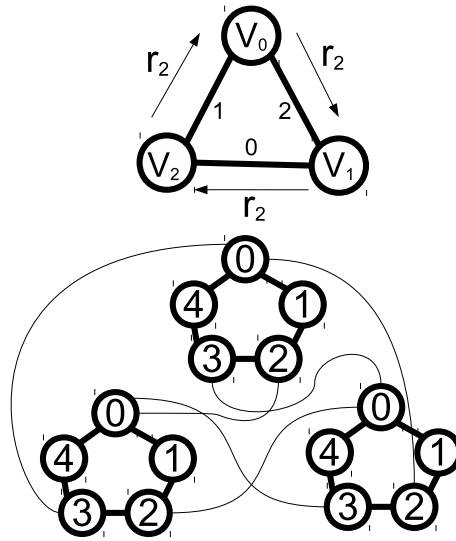


Figura 6:  $K_3$  usado como 5-suporte.

## 5. Conclusões

O produto funcional é uma generalização do produto cartesiano, e que apresenta algumas das propriedades deste, como a comutatividade e o fato de que o grau máximo do grafo produto seja a soma dos graus máximos dos grafos fatores. Por outro lado, o produto funcional mostrou-se eficiente para construir grafos que de alguma forma “herdam” boas propriedades dos fatores, como foi mostrado na seção anterior, e ainda oferece mais “liberdade” que o produto cartesiano usual na hora de definir as adjacências do grafo produto. Para o futuro, pretende-se estudar o comportamento de algumas invariantes de grafos, assim como condições mais fracas

para garantir a conexidade do produto quando os fatores sejam conexos.

**Abstract** The paper presents a generalization of the Cartesian product of graphs, called functional product. We prove some properties of the new product and show an application, that consist in generate regular graphs that admits  $\Delta$ -range coloring with  $\Delta + 1$  colors.

## Referências

- [1] R. M. Barbosa, M.R.C. Santana, Produtos de Grafos  $Z_m$ -bem-cobertos, *Tema*, **13** (2012) 75–83.
- [2] V. A. Bojarshinov, Edge and total coloring of interval graphs, *Disc. Appl. Math.* 114 (2001) 23–28.
- [3] J. Bondy, U. Murty, “Graph Theory with Applications”, North-Holland, New York, 1976.
- [4] C. N. Campos, C. P. Mello, A result on the total coloring of power of cycles, *Disc. Appl. Math.* 155 (2007) 585–597.
- [5] C. V. P. Friedmann, A. R. G. Lozano, L. Markenzon, C. F. E. M. Waga, Total coloring of Block-cactus graphs, *The journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing*, **78** (2011) 273–283.
- [6] W. Imrich, S. Klavzar, D. Rall, “Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Products”, A K Peters Ltd, (2008).
- [7] A. Kemnitz, M. Marangio, Total colorings of cartesian products of graphs, *Congres. Numer.* 165 (2003), 99–109.
- [8] A. R. G. Lozano, C. V. P. Friedmann, A. S. Siqueira, Relação entre coloração de vértices com folga e coloração total equilibrada, *Almanaque Unigranrio de Pesquisa*, **1** (2011) 103–106.
- [9] A. R. G. Lozano, S. Jurkiewicz, C.V.P. Friedmann, Coloração total equilibrada de grafos, um modelo para redes de interconexão, *Pesquisa Operacional*, **28** (2008) 161–171.
- [10] A. R. G. Lozano, “Coloração Total Equilibrada de Grafos”, Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2005.
- [11] K. Prnaver, B. Zmazek, On the total chromatic number of direct products graphs, *J. Appl. Math Comput.* (2009).
- [12] G. Sabidussi, Graph multiplication, *Math. Z.*, **72**, (1960) 446–457.
- [13] A. S. Siqueira. “Coloração total equilibrada em subfamílias de grafos regulares”, Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2011.

- [14] X. Tan, H. Chen, J. Wu, Total coloring of planar graphs without adjacent 4-cycles. *The Eighth International Symposium on Operational Research and its Applications*, China (2009) 20–22
- [15] V.G. Vizing, The Cartesian product of graphs, *Vyc. Sis.*, **9**, (1963) 30–43.
- [16] H. Yap, “Total colorings of graphs”, Springer, Berlin, 1996.