

Produto Funcional de Grafos

A.R.G. LOZANO^{1*}, A.S. SIQUEIRA², S. JURKIEWICZ³ e C.V.P. FRIEDMANN⁴

Recebido em 27 outubro, 2012 / Aceito em 7 junho, 2013

RESUMO. O trabalho apresenta uma generalização do produto cartesiano de grafos que denominamos de produto funcional de grafos. Provam-se algumas propriedades do novo produto e mostra-se uma aplicação do mesmo, que consiste em gerar grafos regulares que admitem coloração com folga Δ com $\Delta + 1$ cores.

Palavras-chave: produto funcional de grafos, coloração com folga, grafo suporte.

1 INTRODUÇÃO

Em 2008 Lozano, Jurkiewicz e Friedmann [8] apresentaram um algoritmo para troca completa de informações que não dependia da topologia da rede. Para isto, usaram a coloração total equilibrada dos grafos correspondentes às topologias mais comuns e mostraram que tais colorações satisfaziam a Conjectura de Vizing, ou seja, os grafos podiam ser coloridos totalmente com, no máximo, $\Delta + 2$ cores. Posteriormente Lozano, Siqueira e Jurkiewicz [12] provaram que, se um grafo regular pode ser colorido com folga Δ com $\Delta + 1$ cores então a coloração de vértices pode ser completada obtendo-se uma coloração total equilibrada com, no máximo, $\Delta + 2$ cores. O resultado acima citado serviu como motivação para estudar a possibilidade de se construir famílias de grafos regulares com as características mencionadas. Para auxiliar nesta construção, introduziu-se o conceito de produto funcional de grafos e suas propriedades, que são explorados na terceira seção deste artigo. Em seguida apresentamos uma das maneiras de obter estas famílias de grafos regulares usando o produto funcional, e finalizamos com uma seção onde são expostas as perspectivas de trabalhos futuros. Neste texto, os grafos são simples, não orientados e sem laços.

*Autor correspondente: Abel Rodolfo Garcia Lozano

¹Departamento de Matemática da FFP-UERJ, Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades da UNIGRANRIO, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional. E-mail: arglozano@terra.com.br

²Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades da UNIGRANRIO, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional. E-mail: asiqueira@unigranrio.com.br

³Programa de Engenharia da Produção da COPPE-UFRJ. E-mail: jurki@pep.ufrj.br

⁴Departamento de Matemática da FFP-UERJ, Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional. E-mail: cliciavp@terra.com.br

2 DEFINIÇÕES BÁSICAS E NOTAÇÕES

Ao longo do artigo serão usadas as notações listadas a seguir:

- $\{u, v\}$ ou uv denota uma aresta do grafo G , onde u e v são adjacentes;
- $d_G(v)$ ou $d(v)$ se não houver ambiguidade, denota o grau do vértice v no grafo G ;
- $\Delta(G)$ ou Δ se não houver ambiguidade, denota o grau máximo do grafo G ;
- $N_G(v)$ ou $N(v)$ se não houver ambiguidade, denota o conjunto de os todos vértices adjacentes ao vértice v no grafo G ;
- $F(X)$ denota o conjunto de todas as bijeções de X em X ;
- $D(G)$ denota o digrafo obtido pela substituição de cada aresta uv do grafo G pelos arcos (u, v) e (v, u) , mantendo o mesmo conjunto de vértices;
- \mathcal{D} denota o conjunto dos digrafos que satisfazem as seguintes condições:
 1. (u, v) é um arco do digrafo se, e somente se, (v, u) também é um arco do digrafo,
 2. Não existem dois arcos iguais.
- Se $\vec{G} \in \mathcal{D}$, $G(\vec{G})$ denota o grafo obtido pela substituição de cada par de arcos (u, v) e (v, u) de \vec{G} pela aresta uv , mantendo o mesmo conjunto de vértices;
- I_n denota o conjunto de números naturais $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n - 1\}$;
- Se A é um conjunto, $|A|$ denota a cardinalidade de A ;
- $E(X)$ ou E se não houver ambiguidade, denota o conjunto de arestas (arcos) do grafo (digrafo) X ;
- $V(X)$ ou V se não houver ambiguidade, denota o conjunto de vértices do grafo (digrafo) X ;
- C_n denota o ciclo de n vértices;
- K_n denota o grafo completo de n vértices.

Definição 2.1. [3] *Sejam um grafo $G(V, E)$, um conjunto $S \subset (E \cup V)$, um número natural k e um conjunto arbitrário $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ cujos elementos são denominados de cores. Uma **coloração** do grafo G com as cores de C é uma aplicação $f : S \rightarrow C$.*

Na definição acima, se $S = V$ então tem-se uma **coloração de vértices**. No caso de $S = E$, trata-se de uma **coloração de arestas** e finalmente, se $S = E \cup V$, então f é uma **coloração total**. Se $x \in S$ e $f(x) = c_i$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, diz-se que x possui ou está colorido com a cor c_i .

Definição 2.2. [3] *Sejam um grafo $G(V, E)$, um conjunto $S \subset (E \cup V)$ e um conjunto de cores $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$, onde k é um número natural. Uma coloração $f : S \rightarrow C$ do grafo G com as cores de C é uma **coloração própria**, se para todo par $x, y \in S$ tem-se que, se x é adjacente ou incidente a y então $f(x) \neq f(y)$.*

Deste ponto em diante, todas as colorações neste trabalho serão consideradas próprias e sobrejetivas, a menos que explicitamente se especifique o contrário.

Definição 2.3. [15] *Dados um grafo $G(V, E)$, um conjunto $S \subset (E \cup V)$ e um conjunto de cores $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$, onde k é um número natural. Uma coloração $f : S \rightarrow C$ do grafo G com as cores de C é uma **coloração equilibrada**, se para todo par $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tem-se que, $||f^{-1}(c_i)| - |f^{-1}(c_j)|| \leq 1$, sendo $|f^{-1}(c_i)|$ e $|f^{-1}(c_j)|$ as cardinalidades dos conjuntos dos elementos de S que possuem as cores c_i e c_j , respectivamente.*

Definição 2.4. [5] *Sejam um grafo $G(V, E)$, um conjunto de cores $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$, onde k é um número natural, e um número natural p , tal que $p \leq \Delta(G)$. Uma aplicação $f : S \rightarrow C$ é uma **coloração de vértices** do grafo G com as cores de C **com folga p** , se para todo $v \in V$ tem-se que se $d(v) < p$, então $|c(N(v))| = d(v)$, caso contrário, $|c(N(v))| = p$, sendo $|c(N(v))|$ a cardinalidade do conjunto das cores da vizinhança de v .*

Definição 2.5. [15] *Um grafo G é de **classe 1** se admite uma coloração própria de arestas com $\Delta(G)$ cores, caso contrário é de **classe 2**.*

3 PRODUTO FUNCIONAL DE GRAFOS

Nesta seção é apresentada a definição de produto funcional de grafos, para este fim, é necessário definir aplicações, denominadas aplicações de ligação, que associam cada aresta de um fator com uma bijeção definida no conjunto de vértices do outro. Esta bijeção indica como será feita a ligação dos vértices do grafo produto. O produto cartesiano de grafos pode ser visto como um produto funcional, onde a todas as arestas são associadas à aplicação identidade correspondente.

Definição 3.1. *Os digrafos $\vec{G}_1(V_1, E_1)$ e $\vec{G}_2(V_2, E_2)$ são ditos **funcionalmente ligados** pelas aplicações $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$ e $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$ se f_1 e f_2 são tais que:*

1. *Se para todo arco $(u, v) \in E_1$ se $(v, u) \in E_1$, então $f_1((u, v)) = (f_1((v, u)))^{-1}$;*
2. *Se para todo $(x, y) \in E_2$ se $(y, x) \in E_2$, então $f_2((x, y)) = (f_2((y, x)))^{-1}$;*
3. *Para todo par de arcos $(u, v) \in E_1$ e $(x, y) \in E_2$, tem-se que $f_2((x, y))(u) \neq v$ ou $f_1((u, v))(x) \neq y$.*

As aplicações f_1 e f_2 são denominadas **aplicações de ligação**.

Definição 3.2. *Sejam dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$. Se $D(G_1)$ e $D(G_2)$ são funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$ e $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$, então os grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ são ditos **funcionalmente ligados** pelas mesmas aplicações.*

Definição 3.3. Sejam $\vec{G}_1(V_1, E_1)$ e $\vec{G}_2(V_2, E_2)$ **digrafos** funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$ e $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$. O **produto funcional** do digrafo \vec{G}_1 pelo digrafo \vec{G}_2 segundo as aplicações f_1 e f_2 , denotado por $(\vec{G}_1, f_1) \times (\vec{G}_2, f_2)$, é o digrafo $\vec{G}^*(V^*, E^*)$ definido por:

- $V^* = V_1 \times V_2$.
- $((u, x), (v, y)) \in E^*$ se, e somente se, uma das seguintes condições for verdadeira:
 1. $(u, v) \in E_1$ e $f_1((u, v))(x) = y$;
 2. $(x, y) \in E_2$ e $f_2((x, y))(u) = v$.

A Figura 1 apresenta dois digrafos com suas respectivas aplicações de ligação e o digrafo obtido como resultado do produto de ambos os pares.

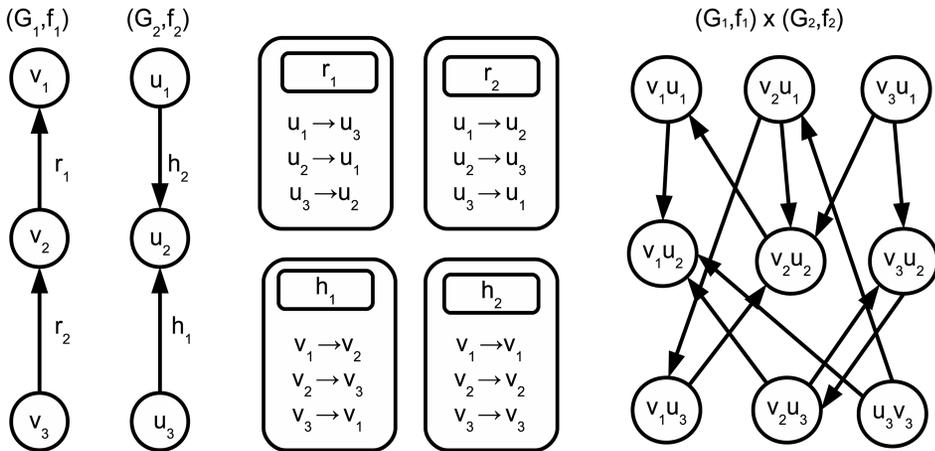


Figura 1: Produto funcional de dois digrafos.

Definição 3.4. Sejam $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ **grafos** funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$ e $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$. O **produto funcional** do grafo G_1 pelo grafo G_2 , denotado por $(G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$, é o grafo $G(\vec{G}^*(V^*, E^*))$, sendo $\vec{G}^*(V^*, E^*) = (D(G_1), f_1) \times (D(G_2), f_2)$.

É interessante notar que o Produto Cartesiano de Grafos é um caso particular do Produto Funcional de Grafos definido acima, quando f_1 e f_2 atribuem a identidade a todos os arcos dos digrafos correspondentes. A seguir será definido um tipo especial de bijeção, denominado rotação.

Definição 3.5. Dado um número natural n , uma **rotação em I_n** é uma bijeção $f : I_n \rightarrow I_n$ definida como segue:

$$f(i) = (i + k) \pmod{n},$$

onde o número natural k é constante.

Definição 3.6. *Sejam n um número natural e A um conjunto finito tal que $|A| = n$. Uma bijeção $f : A \rightarrow A$ é uma **rotação em A** , se existem, uma bijeção $h : I_n \rightarrow A$ e uma rotação r em I_n tais que $f(h(i)) = h(r(i))$, para todo $i \in I_n$.*

Observe que, na definição acima, se $h(i)$ é representado por x_i , tem-se que $f(h(i)) = h(r(i)) = x_{r(i)}$. Isso significa que para conhecer a rotação, basta conhecer o valor em x_0 . Neste texto $r_i(A)$ denotará a rotação em A tal que $r(h(0)) = h(i)$. Se não existir ambiguidade, tal rotação será representada simplesmente por r_i .

A Figura 2 representa o produto funcional do caminho P_3 por ele mesmo, associado a duas diferentes aplicações de ligação (as rotações r_1 e r_2). Na figura, cada vértice da forma (v_i, v_j) é representado por $v_i v_j$ e as linhas descontínuas descrevem as arestas do produto cartesiano usual de grafos.

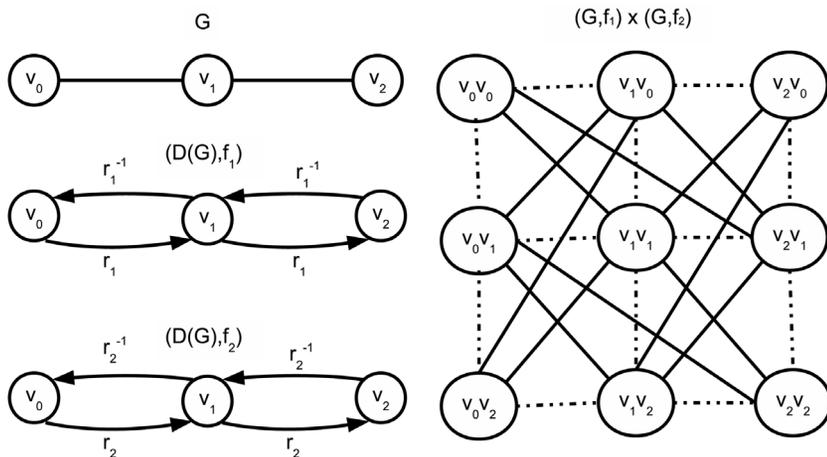


Figura 2: Produto funcional de dois grafos.

Os teoremas a seguir mostram algumas propriedades do produto funcional.

Teorema 3.1. *Sejam $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ grafos funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$ e $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$. Então os grafos $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$ e $G^{**}(V^{**}, E^{**}) = (G_2, f_2) \times (G_1, f_1)$ são isomorfos. Neste sentido, o produto funcional de grafos é comutativo.*

Demonstração. Sejam $E'_1 = E(D(G_1))$ e $E'_2 = E(D(G_2))$. Provaremos que dados dois vértices $(u, x) \in V^*$ e $(v, y) \in V^*$, então a aresta $\{(u, x), (v, y)\} \in E^*$ se, e somente se, a aresta $\{(x, u), (y, v)\} \in E^{**}$. Tem-se que $\{(u, x), (v, y)\} \in E^*$ se, e somente se:

- 1 – $(u, v) \in E'_1$ e $f_1((u, v))(x) = y$ e $(v, u) \in E'_1$ e $f_1(v, u)(y) = (f_1((u, v)))^{-1}(y) = x$ ou
- 2 – $(x, y) \in E'_2$ e $f_2((x, y))(u) = v$ e $(y, x) \in E'_2$ e $f_2(y, x)(v) = (f_2((x, y)))^{-1}(v) = u$.

$\{(x, u), (y, v)\} \in E^{**}$ se, e somente se:

- 3 – $(x, y) \in E'_2$ e $f_2((x, y))(u) = v$ e $(y, x) \in E'_2$ e $f_2(y, x)(v) = (f_2((x, y)))^{-1}(v) = u$ ou
 - 4 – $(u, v) \in E'_1$ e $f_1((u, v))(x) = y$ e $(v, u) \in E'_1$ e $f_1(v, u)(y) = (f_1((x, y)))^{-1}(y) = x$.
- Como 1 é equivalente a 4 e 2 é equivalente a 3 o teorema está provado. □

Teorema 3.2. *Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$ e $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$. Para todo vértice (u, x) do grafo $G^* = (V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$ tem-se que: $d_{G^*}((u, x)) = d_{G_1}(u) + d_{G_2}(x)$.*

Demonstração. Para cada $(u, x) \in V^*$, denota-se por $E_{G^*}((u, x))$ o conjunto de arestas incidentes nesse vértice no grafo G^* . Constrói-se a aplicação $h_1 : N_{G_1}(u) \rightarrow E_{G^*}((u, x))$ da seguinte forma: $h_1(v) = \{(v, y), (u, x)\}$ onde $y \in V_2$ é tal que $f_1((u, v))(x) = y$ com $(u, v) \in E(D(G_1))$; y existe pois $f_1((u, v))$ é bijetiva. Por outro lado h_1 é injetiva, pois se $v_1, v_2 \in N_{G_1}(u)$ e $v_1 \neq v_2$ então necessariamente $(v_1, y_1)(u, x) \neq (v_2, y_2)(u, x)$ independentemente do valor de y_1 e y_2 . De forma semelhante, construímos $h_2 : N_{G_2}(x) \rightarrow E_{G^*}((u, x))$. Se uma aresta é incidente em (u, x) no grafo G^* ela tem a forma $\{(u, x), (v, y)\}$ logo existe $(u, v) \in E(D(G_1))$ tal que $f_1((u, v))(x) = y$ ou $(x, y) \in E(D(G_2))$ tal que $f_2((x, y))(u) = v$. Por construção de h_1 e h_2 tem-se que $h_1(N_{G_1}(u)) \cup h_2(N_{G_2}(x)) = E_{G^*}((u, x))$. Por outro lado, se $\{(u, x), (v, y)\} \in h_1(N(u))$ e $\{(u, x), (v, y)\} \in h_2(N(v))$ então existem arcos $(u, v) \in E(D(G_1))$ e $(x, y) \in E(D(G_2))$ tais que $f_1((u, v))(x) = y$ e $f_2((x, y))(u) = v$ o que contradiz a condição 3 da definição de aplicações de ligação logo, $h_1(N_{G_1}(u)) \cap h_2(N_{G_2}(x)) = \emptyset$. Podemos agora construir a bijeção

$$h : N_{G_1}(u) \cup N_{G_2}(x) \rightarrow E_{G^*}((u, x)), \text{ definida por}$$

$$h(a) = \begin{cases} h_1(a) & \text{se } a \in N_{G_1}(u) \\ h_2(a) & \text{se } a \in N_{G_2}(x) \end{cases} .$$

O que conclui a prova do teorema. □

Do teorema anterior se obtém, de forma imediata, o seguinte corolário.

Corolário 3.2.1. *Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$ e $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$, então o grafo $G^* = (V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$ tem grau máximo $\Delta(G^*) = \Delta(G_1) + \Delta(G_2)$.*

Em relação à conexidade, o produto funcional de grafos conexos não é necessariamente conexo como mostra a Figura 3, mas também é possível obter um grafo conexo como resultado do produto funcional de dois grafos desconexos. O teorema abaixo oferece uma condição que garante a conexidade do grafo produto funcional, caso os fatores sejam conexos.

Teorema 3.3. *Dados dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ conexos e funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$ e $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$, se f_1 ou f_2 atribui a identidade a todos os arcos do digrafo correspondente, então o produto funcional de G_1 por G_2 segundo f_1 e f_2 é conexo.*

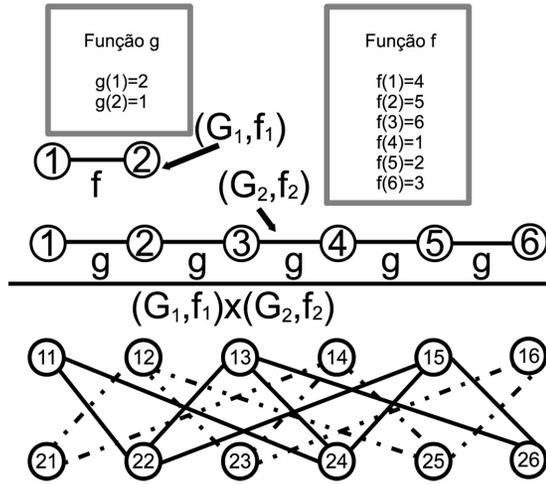


Figura 3: Produto funcional desconexo de dois grafos conexos.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que f_2 atribui a identidade a todos os arcos de $D(G_2)$. Sejam $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$, (u, x) e (v, y) dois vértices de G^* . Como G_1 é conexo, existe um caminho $ux_1 \cdots x_p$ com $x_p = v$ em G_1 . Sejam agora $z_1 = f_1((u, x_1))(x)$, $z_{i+1} = f_1((x_i, x_{i+1}))(z_i)$, $i = 1, \dots, p - 1$, conseqüentemente existe um caminho $P_1 = (u, x)(x_1, z_1)(x_2, z_2) \cdots (v, z_p)$ em G^* . Como G_2 é conexo, existe um caminho $z_p y_1 \cdots y_q$ com $y_q = y$ em G_2 , e como $f_2(e)(v) = v$ para toda aresta $e \in E_2$, então $P_2 = (v, z_p)(v, y_1) \cdots (v, y)$ é um caminho em G^* . A união de P_1 e P_2 proporciona um caminho entre (u, x) e (v, y) . \square

O Produto Cartesiano de dois Grafos é conexo se, e somente se, ambos os fatores forem conexos, e para mais detalhes, pode-se consultar [14, 11]. Observe que esse resultado é uma consequência do teorema anterior, pois no Produto Cartesiano de Grafos, as aplicações de ligação f_1 e f_2 atribuem a identidade a todos os arcos dos digrafos correspondentes. Esse teorema impõe uma condição forte sobre uma das aplicações de ligação para que o produto funcional seja conexo. Mas, neste artigo, tal condição é suficiente para construir famílias de grafos conexos que admitem coloração com folga Δ com $\Delta + 1$ cores, que foi a motivação inicial para a introdução do produto funcional. De qualquer forma, uma proposta de trabalho futuro é determinar condições mais fracas para as aplicações de ligação.

4 UMA APLICAÇÃO DO PRODUTO FUNCIONAL

Nesta seção, mostraremos alguns resultados relativos à construção de famílias de grafos regulares que admitem uma coloração com folga Δ com $\Delta + 1$ cores. Para um estudo mais detalhado, bem como outros resultados pode-se consultar [12]. Muitos grafos usados como grafos suporte para topologias de redes de interconexão, são obtidos mediante o produto cartesiano de grafos, como é o caso do hipercubo, mas nem sempre estes grafos admitem uma coloração com folga Δ com

$\Delta + 1$ cores (como é o caso do toro $C_3 \times C_5$, ilustrado na Figura 4). Com uma modificação adequada, pode-se obter um grafo que admite a coloração desejada mantendo as características dos grafos suporte de redes (no que diz respeito à diâmetro, conexidade, regularidade, etc). As definições e teoremas a seguir exploram a ideia anterior.

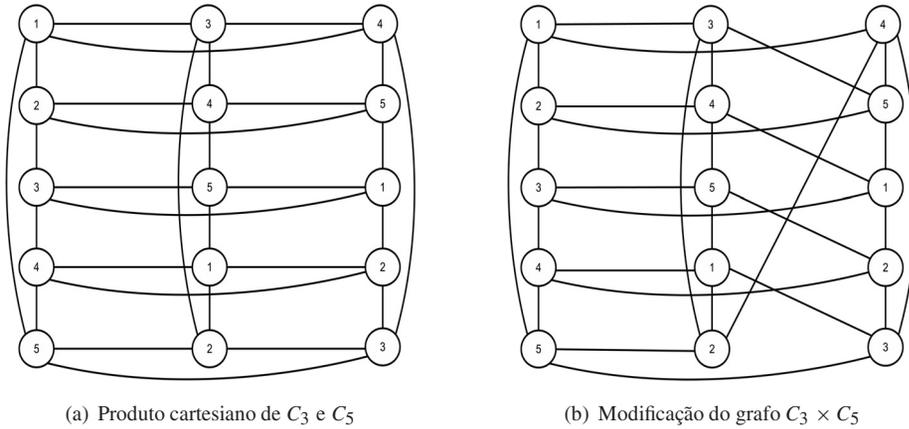


Figura 4: $C_3 \times C_5$ e $C_3 \times C_5$ modificado, coloridos com 5 “cores”.

Definição 4.1 (Grafo k -suporte). Dado um número natural $k, k \geq 3$, o grafo $G = (V, E)$, é um k -suporte se satisfaz as seguintes condições

1. G é um grafo regular de grau $k - 3$;
2. Existe uma aplicação $f : E(G) \rightarrow F(I_k)$, tal que G e C_k estão funcionalmente ligados por f e \mathbf{Id} , onde $\mathbf{Id} : E(C_k) \rightarrow F(I_{|V|})$ é a aplicação que a cada arco de $D(C_k)$ faz corresponder a função identidade;
3. O grafo $G^* = (f_1, G) \times (\mathbf{Id}, C_k)$ pode ser colorido com folga $\Delta(G^*)$ com $\Delta(G^*) + 1$ cores.

Teorema 4.1. Se $G(V, E)$ é um grafo k -regular de classe 1, então G é $(k + 3)$ -suporte.

Demonstração. Sejam $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V(C_{k+3}) = \{u_0, u_1, \dots, u_{k+2}\}$, $C = \{2, 3, 4, \dots, k + 1\}$ um conjunto e $c : E \rightarrow C$, uma coloração de arestas de G usando o conjunto C . Dividiremos o restante da prova em dois casos:

Caso 1. $k = \Delta(G)$ é par:

Denotamos por i' o número $(k + 3) - i$, para todo $i \in \{2, 3, \dots, (\frac{k}{2} + 1)\}$. Veja agora que $i + i' = 0 \pmod{k + 3}$, e que para cada par $\{i, i'\}$ o subgrafo $G_i(V_i, E_i)$ induzido pelo conjunto de arestas $\{e \in E : c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\}$ é um grafo regular de grau 2 e que $V = V_i$. Logo, as componentes conexas de cada subgrafo G_i , são ciclos G_{i1}, \dots, G_{it_i} , onde t_i é um número

natural, $t_i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, e cada ciclo G_{ij} está associado a dois ciclos orientados \vec{G}_{ij}^1 e \vec{G}_{ij}^2 em $D(G)$. Definimos as aplicações $f_1 : E(D(G)) \rightarrow V(C_{\Delta+3})$, $f_2 : E(D(C_{\Delta+3})) \rightarrow V$ como segue:

$$f_1(x) = \begin{cases} r_i & \text{se } x \in E(\vec{G}_{ij}^1); i \in \{2, 3, \dots, \frac{k}{2} + 1\}; j \in \{1, 2, \dots, t_i\} \\ r_{i'} & \text{se } x \in E(\vec{G}_{ij}^2); i \in \{2, 3, \dots, \frac{k}{2} + 1\}; j \in \{1, 2, \dots, t_i\} \end{cases}$$

$f_2(x) = Id(x)$ para todo arco $x \in D(C_{\Delta+3})$, onde Id representa a função identidade.

Sejam agora $G^* = (f_1, G_1) \times (f_2, C_{k+3})$, $V^* = V(G^*)$, $E^* = E(G^*)$. A coloração $f : V^* \rightarrow \{0, 1, \dots, (k + 2)\}$ definida por: $f((v_i, u_j)) = j$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, 2, \dots, (k + 2)$ é uma coloração com folga $\Delta(V^*)$ com $\Delta(V^*) + 1$ “cores” do grafo G^* . O conjunto de “cores” $\{0, 1, \dots, (k + 2)\}$ possui $k + 3$ elementos e pelo corolário 3.2.1 G^* é um grafo regular de grau $\Delta(G) + \Delta(C_{k+3}) = k + 2$. Para analisar que a coloração tem folga $\Delta(G^*)$, observe que por simetria basta analisar um vértice de V^* , por exemplo (v_1, u_0) , seja $N_G(v_1) = \{x_2, \dots, x_{k+1}\}$, por facilidade e sem perder generalidade vamos supor que $c(v_1x_j) = j$, $j \in \{2, \dots, k + 1\}$ (na verdade cada aresta incidente a v_1 possui uma cor diferente) então os extremos dos arcos de $(f_1, \vec{G}_1) \times (f_2, \vec{C}_{\Delta+3})$ que tem como origem (v_1, u_0) são (v_1, u_1) , (v_1, u_{k+2}) , (x_2, u_2) , (x_3, u_3) , (x_4, u_4) , \dots , (x_{k+1}, u_{k+1}) coloridos com as “cores” $1, k + 2, 2, 3, \dots, k + 1$ respectivamente, logo a coloração possui folga Δ .

Caso 2. $k = \Delta(G)$ é ímpar:

Observe que $2 + (k + 1) = 3 + k = 4 + (k - 1) \dots = (\frac{k-1}{2} + 1) + (\frac{k+3}{2} + 1) = (\frac{k+1}{2} + 1) + (\frac{k+1}{2} + 1) = k + 3$, e denotamos por i' o número $(k + 3) - i$, para todo $i \in \{2, 3, \dots, (\frac{k+1}{2} + 1)\}$. Agora o subgrafo $G_i(V_i, E_i)$ induzido pelo conjunto de arestas $\{e \in E : c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\}$ $i \in \{2, 3, \dots, (\frac{k-1}{2} + 1)\}$ é um grafo regular de grau 2, e o subgrafo G_a , com $a = \frac{k+1}{2} + 1$, induzido pelo conjunto de arestas $\{e \in E : c(e) = \frac{k+1}{2} + 1\}$ é um emparelhamento perfeito, e o raciocínio seguido no caso 1, é válido, o que prova o teorema. \square

A Figura 5(a) mostra um grafo 3-regular de classe 1, colorido com os elementos do conjunto $\{2, 3, 4\}$. As setas indicam que ao fazer o produto funcional no sentido indicado é usada a rotação r_3 ou r_4 segundo o caso. Já no sentido contrário a r_4 , é usada r_2 pois $4 + 2 = 0 \pmod{6}$, e no sentido contrário a r_3 é usada r_3 pois $3 + 3 = 0 \pmod{6}$. A Figura 5(b) ilustra o produto funcional com o ciclo C_6 , mas como o número de arestas é muito grande, foram representadas apenas as arestas que tem como extremo o vértice 0 de algum ciclo.

Teorema 4.2. *Se $G(V, E) = \epsilon$ um grafo completo então G é um $(|V| + 2)$ -suporte.*

Demonstração. Seja $G(V, E) = K_n$. Se n é par então G é de classe 1 e o teorema está provado, logo vamos supor que n é ímpar. Sejam $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e $c : E \rightarrow C = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ uma coloração de arestas de G definida por $c(v_i, v_j) = \frac{(n+1)}{2}(i + j) \pmod{n}$; $i, j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$; $i \neq j$. É claro que c é própria pois fixando $i_0 \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, temos que $\frac{(n+1)}{2}(i_0 + j_0) \equiv \frac{(n+1)}{2}(i_0 + j_1) \pmod{n}$ se, e somente se, $j_0 \equiv j_1 \pmod{n}$. Antes

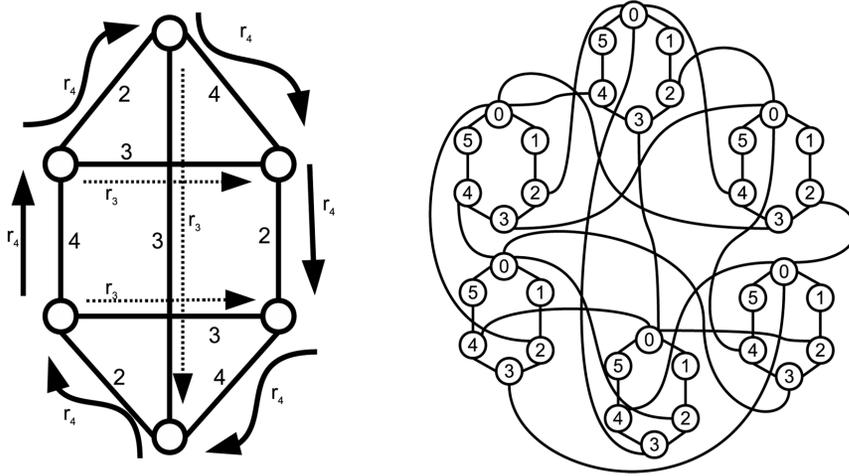


Figura 5: Grafo 3-regular de classe 1 usado como 6-suporte.

de continuar com a prova do teorema, provaremos a seguinte, propriedade de c : se $c_0 \in C$ está ausente no vértice v_{i_0} e $c(\{v_{i_0}, v_{i_1}\}) = 0$, então c'_0 está ausente no vértice v_{i_1} , onde c'_0 denota o inverso aditivo de $c_0 \pmod n$. Observe inicialmente que para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, a cor i está ausente no vértice v_i . De fato, $\frac{(n+1)}{2}(i + i) \equiv \frac{(n+1)}{2}(i + j) \pmod n$, se, e somente se, $i \equiv j \pmod n$, e como $i, j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, então $i = j$, mas G não possui laços, por outro lado $\frac{(n+1)}{2}(i + j) = 0 \pmod n$ se, e somente se, $(i + j) = 0 \pmod n$, isto é, $j = i' \pmod n$, de onde segue imediatamente a propriedade. Para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, denotamos por e_i a aresta $\{v_i, v_{i'}\}$. Agora para cada par de cores $\{i, i'\} \ i \in \{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}$, o subgrafo gerado pelo conjunto de arestas $\{e \in E : c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\} \cup \{e_i\}$ é um grafo regular de grau 2 cujo conjunto de vértices é V , logo G foi decomposto em $\frac{n-1}{2}$ grafos 2-regulares e podemos utilizar o mesmo raciocínio do teorema 4.1, usando as rotações $r_2, r_3, \dots, r_{\frac{n+3}{2}}$ e suas inversas definidas em I_{n+2} nos respectivos ciclos orientados. \square

A Figura 6 mostra um K_3 sendo usado como 5-suporte. Novamente foram omitidas as arestas não adjacentes a vértices rotulados com 0.

5 CONCLUSÕES

O produto funcional é uma generalização do produto cartesiano, e que apresenta algumas das propriedades deste, como a comutatividade e o fato de que o grau máximo do grafo produto seja a soma dos graus máximos dos grafos fatores. Por outro lado, o produto funcional mostrou-se eficiente para construir grafos que de alguma forma “herdam” boas propriedades dos fatores, como foi mostrado na seção anterior, e ainda oferece mais “liberdade” que o produto cartesiano usual na hora de definir as adjacências do grafo produto. Para o futuro, pretende-se estudar o comportamento de algumas invariantes de grafos, assim como condições mais fracas para garantir a conexidade do produto quando os fatores sejam conexos.

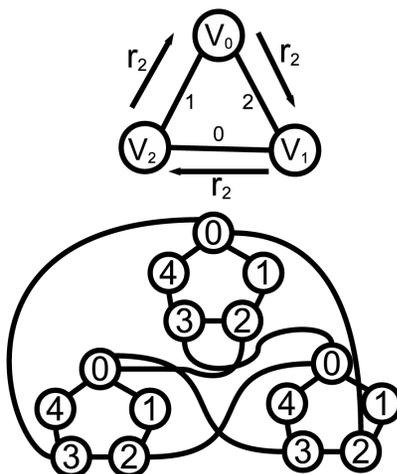


Figura 6: K_3 usado como 5-suporte.

ABSTRACT. The paper presents a generalization of the Cartesian product of graphs, called functional product. We prove some properties of the new product and show an application, that consist in generate regular graphs that admits Δ -range coloring with $\Delta + 1$ colors.

Keywords: functional product of graphs, range coloring, support graph.

REFERÊNCIAS

- [1] R.M. Barbosa & M.R.C. Santana. Produtos de Grafos Z_m -bem-cobertos. *Tema*, **13** (2012), 75–83.
- [2] V.A. Bojarshinov. Edge and total coloring of interval graphs. *Disc. Appl. Math.*, **114** (2001), 23–28.
- [3] J. Bondy & U. Murty. “Graph Theory with Applications”, North-Holland, New York, (1976).
- [4] C.N. Campos & C.P. Mello. A result on the total coloring of power of cycles. *Disc. Appl. Math.*, **155** (2007), 585–597.
- [5] C.V.P. Friedmann, A.R.G. Lozano, L. Markenzon & C.F.E.M. Waga. Total coloring of Block-cactus graphs. *The journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing*, **78** (2011), 273–283.
- [6] W. Imrich, S. Klavzar & D. Rall. “Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Products”, A.K. Peters Ltd., (2008).
- [7] A. Kemnitz & M. Marangio. Total colorings of cartesian products of graphs. *Congres. Numer.*, **165** (2003), 99–109.
- [8] A.R.G. Lozano, S. Jurkiewicz & C.V.P. Friedmann. Coloração total equilibrada de grafos, um modelo para redes de interconexão. *Pesquisa Operacional*, **28** (2008), 161–171.
- [9] A.R.G. Lozano. “Coloração Total Equilibrada de Grafos”, Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, (2005).

- [10] K. Prnaver & B. Zmazek. On the total chromatic number of direct products graphs. *J. Appl. Math. Comput.*, (2009).
- [11] G. Sabidussi. Graph multiplication. *Math. Z.*, **72** (1960), 446–457.
- [12] A.S. Siqueira. “Coloração total equilibrada em subfamílias de grafos regulares”. Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, (2011).
- [13] X. Tan, H. Chen & J. Wu. Total coloring of planar graphs without adjacent 4-cycles. *The Eighth International Symposium on Operational Research and its Applications*, China (2009), 20–22.
- [14] V.G. Vizing. The Cartesian product of graphs. *Vyc. Sis.*, **9** (1963), 30–43.
- [15] H. Yap. “Total colorings of graphs”, Springer, Berlin, (1996).