

Confiabilidade Autovalidável de Sistemas com Processo Exponencial de Falhas*

A.F. MENDONÇA** e M.A. CAMPOS

Recebido em 30 setembro, 2012 / Aceito em 20 dezembro, 2013

RESUMO. A computação da confiabilidade envolve números reais, o que gera problemas numéricos decorrentes das limitações encontradas na manipulação de reais em máquinas digitais. Este trabalho propõe um método, implementado no Matlab utilizando a biblioteca Intlab, para a obtenção de intervalos que encapsulam valores de confiabilidade real de sistemas com processo Exponencial de falhas, controlando erros numéricos. O software SHARPE foi empregado para validar o método implementado.

Palavras-chave: intervalo encapsulador, confiabilidade real, confiabilidade autovalidável, distribuição exponencial.

1 INTRODUÇÃO

A confiabilidade [4, 12, 13, 20] é uma probabilidade e seu cálculo necessariamente gera números reais, o que resulta em problemas numéricos originados da limitação de se operar com os reais em máquinas digitais. A utilização de intervalos [15, 16] é uma alternativa para encapsular valores reais, controlando erros numéricos. Portanto, intervalos empregados nesse contexto são denominados autovalidáveis. Dessa forma, este artigo apresenta um método numérico, que resulta em **intervalos autovalidáveis**, isto é, intervalos que englobam o valor real da função confiabilidade [4, 20].

A matemática intervalar [15, 16, 17] fornece fundamentação teórica para o desenvolvimento do método intervalar proposto. Os intervalos autovalidáveis obtidos neste trabalho foram calculados utilizando aritmética intervalar de exatidão máxima [11]. Assim, os intervalos possuem a menor amplitude possível, com limites que pertencem ao sistema de ponto-flutuante [5] implementado na máquina digital.

Dessa forma, quando se objetiva encapsular um dado valor real, a aritmética intervalar de exatidão máxima busca que os limites de intervalos sejam formados por números consecutivos no

*Trabalho apresentado no XXXIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2012).

**Autor correspondente: André Feitoza Mendonça

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Centro de Informática, Caixa Postal 7851, 50732-970 Recife, PE, Brazil.

E-mails: afm4@cin.ufpe.br; mac@cin.ufpe.br

sistema de ponto-flutuante em questão. Entretanto, em [17] constata-se que operações aritméticas definidas sobre intervalos podem aumentar a amplitude de seus resultados. A amplitude do intervalo resultante da soma de outros dois, por exemplo, é dada também pela soma das amplitudes dos operandos intervalares. Assim, a aritmética de exatidão máxima não garante que os limites dos intervalos sejam consecutivos no sistema de ponto-flutuante após um conjunto de operações aritméticas.

Os cálculos intervalares foram realizados no Matlab [14], utilizando a biblioteca IntLab [19]. Para [17], o IntLab garante que os limites dos intervalos obtidos são representados por 15 dígitos decimais (precisão dupla) que, quando convertidos para a base binária, pertencem ao padrão IEEE 754 [8]. Opcionalmente, os limites de intervalos também podem ser representados por 5 dígitos decimais (precisão simples). De acordo com [17], cada operação intervalar realizada pela biblioteca IntLab emprega aritmética de exatidão máxima. Existem outras abordagens para a implementação de cálculos intervalares, tais como as apresentadas em [6, 10]. Entretanto, optou-se pelo IntLab neste trabalho, uma vez que seu uso é amplamente difundido com usuários de mais de 50 países [19].

Desse modo, o método intervalar proposto foi utilizado para a representação autovalidável do valor da função de confiabilidade real de sistemas com componentes com lei de falhas apresentando distribuição Exponencial¹. Os intervalos obtidos foram comparados com os resultados do software SHARPE [20]. Para [7], o SHARPE é utilizado por universidades e empresas em confiabilidade e análise de desempenho.

Para [12], a modelagem Exponencial para a distribuição de falhas reflete o comportamento de diversas aplicações reais, ainda que implique em uma taxa de falhas constante. Atualmente, por exemplo, o processo de fabricação de componentes eletrônicos envolve testes de stress. Tais testes provocam uma extensão da porção da Curva da Banheira² [4, 12] que apresenta taxa de falhas constante, fazendo com que tais componentes eletrônicos sejam apropriadamente modelados pela lei de falha Exponencial.

Os trabalhos de [22, 23, 24, 25, 26] abordam a mesma temática deste. Tais estudos relacionados à análise intervalar da confiabilidade são motivados pela impossibilidade da determinação exata do comportamento da distribuições de falhas, resultando em inexatidões que são modeladas por intervalos. Em [3] é apresentado um enfoque distinto onde é empregada análise Bayesiana para a determinação de intervalos para a confiabilidade. Nesse contexto, o presente trabalho possui uma abordagem inédita que considera erros numéricos introduzidos durante cálculos da função confiabilidade real em máquinas digitais. Assim, são obtidos intervalos que possuem exatidão máxima, considerando o sistema de ponto-flutuante da máquina em questão.

Todos os cálculos apresentados neste artigo foram executados na seguinte plataforma computacional:

¹Segundo Ebeling [4], a distribuição Exponencial é usualmente empregada na modelagem de processos de falhas de sistemas.

²Na literatura a Curva da Banheira é usualmente denominada de Bathhtub Curve.

- Processador: Celeron(R) Dual-Core CPU T3000 1.80 GHz;
- Memória RAM: 2.00 GB;
- Sistema Operacional: Windows 7 Starter.

Este artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta um método intervalar autovalidável para a confiabilidade real de sistemas com um único componente. A Seção 3 mostra intervalos encapsuladores para a confiabilidade de sistemas complexos. Na Seção 4 é realizada a validação da confiabilidade autovalidável proposta com o aplicativo SHARPE. A Seção 5 trata das conclusões. Por fim, estão as principais referências.

2 CONFIABILIDADE AUTOVALIDÁVEL PARA SISTEMAS COM UM ÚNICO COMPONENTE

A modelagem probabilística da confiabilidade é realizada tendo como base uma variável aleatória contínua não negativa T , que representa a duração de tempo até a primeira falha de um determinado sistema. Em [12], a confiabilidade é definida como a probabilidade de um equipamento operar satisfatoriamente por um período de tempo dentro de condições previamente especificadas.

Seja S um sistema com um único componente em operação pelo período $[0, t]$. Então, a função confiabilidade real de S , no instante de tempo t , é dada por:

$$R(t) = P(T \geq t). \quad (2.1)$$

Seja $f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função densidade de probabilidade³ da variável T , então (2.1) pode ser reescrita como:

$$R(t) = \int_t^{+\infty} f_T(t)dt = 1 - \int_0^t f_T(t)dt. \quad (2.2)$$

O intervalo encapsulador autovalidável para a função confiabilidade real é obtido com base no Método de Simpson Intervalar. Segundo [2], esse método é utilizado para o cálculo de intervalos para integrais definidas de uma determinada função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo apropriado para a obtenção de intervalos para probabilidades de variáveis aleatórias contínuas. Nesse método, divide-se o intervalo de integração $[a, b]$ em p partições cujos extremos são: $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p = b$, onde $A_i = [a_{i-1}, a_i]$ para $i = 1, 2, \dots, p$. Para cada partição, um intervalo encapsulador é obtido por meio da seguinte equação intervalar:

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)dt \in S_i = \frac{w(A_i)}{6}(F(a_{i-1}) + 4f(m(A_i)) + F(a_i)) - \frac{w(A_i)^5}{2880}G(\xi_i), \quad (2.3)$$

onde $i = 1, 2, \dots, p$, $\xi_i \in A_i$, $w(A_i)$ e $m(A_i)$ são a amplitude e o ponto médio de A_i , e F e G são extensões intervalares [16, 17] para $f(t)$ e $f^{(4)}(t)$, respectivamente. O intervalo resultante do método, S , é dado pelo somatório dos p intervalos S_i calculados por (2.3).

³Segundo [9], f_T é a densidade de probabilidade de T se: i) $f_T(t) \geq 0$; ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)dt = 1$.

Ou seja:

$$S = \sum_{i=1}^p S_i \tag{2.4}$$

Assim, tal método é empregado para o cálculo de intervalos que encapsulam o valor de

$$\int_0^t f_T(t)dt = P(0 < T < t).$$

Dessa forma, tem-se que:

$$\int_0^t f_T(t)dt \in P_v([0, t]),$$

onde $P_v([0, t])$ é a representação do intervalo encapsulador para $P(0 < T < t) = \int_0^t f_T(t)dt$.

Com base em [21], neste trabalho foi realizada a implementação, fundamentada no Método de Simpson Intervalar, do método intervalar para o cálculo de intervalos para probabilidades [1] de variáveis aleatórias com distribuição Exponencial⁴. A implementação⁵ foi dada por uma função desenvolvida em Matlab, utilizando a biblioteca IntLab, sendo sua chamada dada por:

$$\text{exp1}(a, b, p, \alpha).$$

Portanto, $\text{exp1}(a, b, p, \alpha)$ é a função desenvolvida para o cálculo de $P_v([a, b])$. Verifica-se que α é o parâmetro da distribuição Exponencial e os valores de a e b são limites de integração inferior e superior, respectivamente. Assim, tem-se que:

$$\int_a^b f_T(t)dt = \int_a^b \alpha e^{-t\alpha} dt \in \text{exp1}(a, b, p, \alpha).$$

O valor de p é um número inteiro positivo que representa o número de divisões do intervalo $[a, b]$. Portanto, p define a resolução pelo qual o Método de Simpson Intervalar é executado. Em [2], afirma-se que a amplitude do intervalo calculado é dado por:

$$w(S) = \sum_{i=1}^p w(S_i) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2880} w(A_i)^5 w(G(A_i)). \tag{2.5}$$

Quando se considera que as p partições são dadas em pontos equidistantes, tem-se que $w(A_i) = \frac{b-a}{p}$, para $i = 1, 2, \dots, p$. Assim, a Equação (2.5) pode ser reescrita como:

$$w(S) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2880} \frac{(b-a)^5}{p^5} w(G(A_i)). \tag{2.6}$$

⁴Vale destacar que extensões do Método de Simpson Intervalar poderiam ser utilizadas para outras distribuições de probabilidade contínuas. Em [21], são definidos intervalos encapsuladores para probabilidades com distribuição Normal e Uniforme.

⁵A definição dessa implementação está presente no Anexo A deste trabalho.

Assim, um aumento do valor de p indica uma redução em $w(S)$. Por outro lado, uma distância entre os limites de integração $(b - a)$ maior implica num aumento de $w(S)$. Para o cálculo de intervalo autovalidável para a função confiabilidade, o valor de $(b - a)$ representa período de observação de um dado sistema.

Nesse trabalho, define-se o intervalo encapsulador para a função confiabilidade real, isto é, a **confiabilidade autovalidável**. Assim, tem-se que:

$$R_v(t) = [1, 1] - P_v([0, t]), \quad (2.7)$$

onde $[1, 1]$ é o intervalo degenerado [17] do número real 1.

Sejam os números reais x e y e os intervalos X e Y . Em [17], com relação às operações sobre o espaço dos intervalos, afirma-se que:

$$X * Y = \{x * y | x \in X, y \in Y\}, * \in \{+, -, \cdot, /\}, \quad (2.8)$$

onde $0 \notin Y$, caso $*$ seja igual a $/$.

De acordo com (2.8), uma vez que $x \in X$ e $y \in Y$, tem-se que o valor real $x * y$ também pertencerá ao intervalo $X * Y$. Portanto, pode-se afirmar que

$$x * y \in X * Y. \quad (2.9)$$

Com base em (2.9), prova-se que $R_v(t)$ encapsula $R(t)$, ou seja, $R(t) \in R_v(t)$.

Proposição 2.1. *Seja a variável aleatória contínua T , que representa o tempo para falha de um determinado sistema, e sua função confiabilidade real dada por $R(t) = 1 - P(0 < T < t)$. Então, $R(t) \in R_v(t)$.*

Demonstração. Sabe-se que a confiabilidade autovalidável é dada por

$$R_v(t) = [1, 1] - P_v([0, t]).$$

Assim, tem-se que: $1 \in [1, 1]$ e $P(0 < T < t) \in P_v([0, t])$ (Equação 8.7 de [2]).

Dessa forma, com base em (2.9), tem-se que:

$$1 - P(0 < T < t) \in [1, 1] - P_v([0, t]) \Rightarrow R(t) \in R_v([0, t]). \quad \square$$

Utilizando a biblioteca IntLab, este artigo apresenta a implementação de um método intervalar para a obtenção da confiabilidade autovalidável de um sistema de componente único com processo de falhas distribuído exponencialmente. Assim, o método intervalar é dado por:

$$\text{confexp}(t, p, \alpha) = [1, 1] - \text{exp1}(0, t, p, \alpha).$$

Para fins de exemplificação do método intervalar autovalidável desenvolvido para a função confiabilidade real, considere o sistema S de componente único com lei Exponencial de falhas de

parâmetro $\alpha = 0.001$. O valor da confiabilidade real desse sistema, após um período de operação de 50000 horas, é dado por:

$$R(50000) = 1 - \int_0^{50000} 0.001e^{-0.001t} dt = e^{-50} \approx 0.$$

Portanto, $R(50000)$ é tão próximo a zero que, quando os cálculos são realizados na plataforma de pesquisa⁶, o seu valor é arredondado para zero. Entretanto, a utilização do método intervalar proposto, quando aplicado para o cálculo da confiabilidade autovalidável $R_v(50000)$ relacionada ao sistema S , resulta num intervalo que encapsula o número zero. Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} R_v(50000) &= [1, 1] - P_v([0, 50000]) \\ &= \text{confexp}(50000, 5000, 0.001) \\ &= [1, 1] - \text{exp1}(0, 50000, 5000, 0.001) \\ &= 10^{-12} \times [-0.59241500593999, 0.20317081350641]. \end{aligned}$$

Observa-se que o intervalo obtido encapsula o valor de $R(50000)$ e possui uma amplitude de $7.955858194464000 \times 10^{-13}$, garantindo exatidão no controle de erros numéricos. Assim, pode-se garantir que o valor da confiabilidade real em questão pertence ao intervalo calculado. Nesse caso, se o método intervalar proposto não fosse empregado, qualquer multiplicação que envolvesse $R(50000)$ resultaria no número zero, inviabilizando demais cálculos.

Ainda com relação ao sistema S , a Tabela 1 apresenta intervalos obtidos para encapsular o valor de $R(50000)$, calculados a partir de uma variação do valor do parâmetro p . Pode-se constatar que, uma vez que o valor de p cresce, a amplitude do intervalo encapsulador para a confiabilidade real em questão diminui. Portanto, a escolha de valores elevados para p garante uma menor amplitude nos intervalos resultantes.

Tabela 1: Comparativo entre os intervalos autovalidáveis e respectivas amplitudes para diferentes valores de p .

p	$R_v(50000)$	$w(R_v(50000))$
50	$[-0.13507748932207, 0.21214473290843] \times 10^{-3}$	$< 3.5 \times 10^{-4}$
100	$[-0.48146918685266, 0.60360025926354] \times 10^{-5}$	$< 1.1 \times 10^{-5}$
1000	$[-0.53756554763141, 0.54905635593628] \times 10^{-10}$	$< 1.1 \times 10^{-10}$
5000	$[-0.59241500593999, 0.20317081350641] \times 10^{-12}$	$< 8.0 \times 10^{-13}$

No decorrer deste trabalho, pode-se verificar que a utilização de $p \leq 200$ para o cálculo da confiabilidade autovalidável para outros sistemas⁷ resulta em intervalos com amplitudes na ordem de 10^{-8} ou inferior. Entretanto, a Tabela 1 exhibe que, apenas para valores de $p \geq 1000$, $R_v(50000)$

⁶Plataforma computacional previamente especificada neste trabalho.

⁷Sistemas apresentados nos estudos de caso das Seções 4.1 e 4.2.

apresenta amplitudes nessa ordem de grandeza. Isso ocorre pela escolha do tempo operação de S para o cálculo da confiabilidade autovalidável que, nesse caso, é bem superior aos períodos utilizados nos demais casos apresentados neste trabalho. Como explicitado pela Equação (2.6), períodos de observação maiores contribuem para o aumento da amplitude dos intervalos autovalidáveis calculados, sendo necessário um valor de p maior para a obtenção de exatidão similar aos resultados encontrados neste trabalho.

Na Tabela 2 constata-se que o aumento de p resulta em um incremento proporcional no tempo de processamento para obtenção de $R_v(50000)$. Dessa forma, p deve ser escolhido após uma análise de custo-benefício, considerando a amplitude do intervalo resultante e o seu custo computacional associado.

Tabela 2: Comparativo entre os tempos de processamento para cálculo de intervalos autovalidáveis e os respectivos valores de p utilizados.

p	Tempo (segundos)
50	2.381216
100	4.619713
1000	47.697110
5000	252.770419

3 INTERVALOS AUTOVALIDÁVEIS PARA SISTEMAS COMPLEXOS

Sistemas complexos ou compostos [4] podem ser convenientemente representados como uma “caixa preta” que possui dois conjuntos de terminais acessíveis, os quais compõem as entradas e saídas do sistema. Tais terminais acessíveis são determinados pontos de um sistema que permitem que o mesmo seja estimulado e que respostas de seu processamento possam ser observadas. Esses sistemas são formados por um conjunto de componentes que atuam juntos para realizar uma determinada função, a qual não seria possível realizar com quaisquer partes individuais isoladas.

Neste trabalho, assume-se que um componente pode apresentar apenas dois estados: operacional e indisponível. Nesse último estado, considera-se que o componente possui no mínimo uma falha que comprometa o seu funcionamento correto.

Dessa forma, a análise da confiabilidade de sistemas complexos [4, 12] envolve o cálculo da função confiabilidade real para cada um de seus componentes. Em seguida, os valores reais obtidos são combinados de acordo com a configuração dos componentes, resultando no valor da confiabilidade real referente ao sistema complexo como um todo.

As seguintes configurações são abordadas neste artigo: **série** e **paralelo**. Nesta seção são definidos intervalos autovalidáveis para essas configurações.

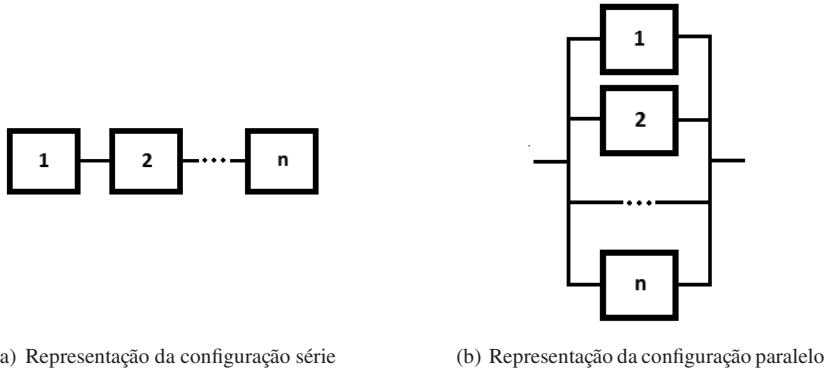


Figura 1: Configurações lógicas de sistemas complexos.

A Figura 1(a) indica que o sistema complexo com componentes em série apresenta apenas um caminho crítico. Seja L o sistema complexo formado por n componentes em série [4, 12, 18]. Assim, considerando que os processos de falhas dos componentes de L são independentes, afirma-se que a função confiabilidade real de L é dada por:

$$R(t) = R_1(t) \times R_2(t) \times \dots \times R_n(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t), \tag{3.1}$$

onde $R_i(t)$ é a função confiabilidade real do i -ésimo componente do sistema L .

Este artigo propõe que a confiabilidade autovalidável para o sistema L seja dada pela multiplicação dos intervalos encapsuladores da confiabilidade de cada componente. Assim, tem-se que:

$$R_v(t) = \prod_{i=1}^n R_{(i)v}(t), \tag{3.2}$$

onde $R_{(i)v}(t)$ é a confiabilidade autovalidável para o i -ésimo componente de L .

Para fins de exemplificação da Equação Intervalar (3.2) proposta neste trabalho, considere K um sistema com dois componentes conectados em série. Suponha que os componentes de K possuem processos de falhas exponencialmente distribuídos com parâmetros $\alpha_1 = 0.05$ e $\alpha_2 = 0.1$, respectivamente. Tendo em vista que os componentes de K possuem lei de falhas com distribuição Exponencial, a função $\text{confexp}(t, p, \alpha)$ pode ser utilizada. A Tabela 3 apresenta as confiabilidades autovalidáveis, considerando p igual a 200, comparadas com respectivos valores reais da função confiabilidade⁸.

Pode-se verificar que, por exemplo, para $t = 500$, o valor real da função confiabilidade se aproxima de zero, sendo arredondado para este valor. Para esse caso, o intervalo obtido encapsula o número zero.

⁸Vale destacar que, nesse caso, a escolha de $p = 200$ foi arbitrária para fins de exemplificação. A Seção 4 apresenta uma discussão mais detalhada sobre a forma de escolha apropriada do valor de p .

Tabela 3: Comparativo entre os valores reais da função confiabilidade de K e respectivas confiabilidades autovalidáveis para diferentes valores de t .

t	$R(t)$	$R_v(t)$
1	0.860707976425058	[0.86070797642505, 0.86070797642506]
5	0.472366552741015	[0.47236655274101, 0.47236655274102]
50	$0.5530843701478346 \times 10^{-3}$	$[0.55308437000912, 0.55308437028808] \times 10^{-3}$
500	0	$[-0.91969138664420, 0.97831376278642] \times 10^{-15}$

A configuração paralela [4, 12, 18], também denominada redundante, implica que o sistema com esta composição falha apenas se todos os seus componentes se apresentarem em estado não operacional. A Figura 1(b) ilustra esta configuração.

Seja o sistema complexo L composto por n componentes redundantes. Dessa forma, a função confiabilidade real de L é representada da seguinte forma:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_{(i)}(t)], \quad (3.3)$$

onde $R_i(t)$ é a função confiabilidade real do i -ésimo componente do sistema L .

Fundamentado em (3.3), este artigo define a confiabilidade autovalidável do sistema L , sendo dada por:

$$R_v(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [[1, 1] - R_{(i)v}(t)], \quad (3.4)$$

onde $R_{(i)v}(t)$ é a confiabilidade autovalidável para o i -ésimo componente de L .

Seja o sistema J formado por dois componentes em paralelo com processos de falhas distribuídos exponencialmente com parâmetros $\alpha_1 = 0.05$ e $\alpha_2 = 0.1$. Para $p = 200$, a Tabela 4 apresenta a comparação da confiabilidade autovalidável com respectivos valores reais da função confiabilidade, considerando valores diferentes de tempo.

Tabela 4: Comparativo entre os valores reais da função confiabilidade de J e respectivas confiabilidades autovalidáveis para diferentes valores de t .

t	$R(t)$	$R_v(t)$
1	0.995358866111616	[0.995358866111610, 0.995358866111620]
50	$0.882698612528370 \times 10^{-1}$	$[0.882698612512300, 0.882698612544600] \times 10^{-1}$
500	$0.1388789083733855 \times 10^{-10}$	$[-0.16510096512157, 0.18457967421171] \times 10^{-6}$
1000	0	$[-0.49746590644606, 0.62151193418459] \times 10^{-5}$

4 VALIDAÇÃO DA CONFIABILIDADE AUTOVALIDÁVEL PARA SISTEMAS COMPLEXOS

Esta seção tem por objetivo validar a confiabilidade autovalidável proposta neste trabalho para sistemas complexos. Desta forma, o aplicativo SHARPE [7, 20] foi empregado para que valores reais de confiabilidade fossem gerados e comparados com os respectivos intervalos encapsuladores obtidos. Essa análise foi realizada utilizando dois estudos de caso, em que sistemas complexos foram modelados no aplicativo SHARPE.

Os resultados obtidos pelo software SHARPE possuem apenas 10 dígitos decimais, sendo, na verdade, uma aproximação do valor exato da função confiabilidade para ambos os estudos de caso. Portanto, para fins de verificação se os resultados obtidos pelo SHARPE são encapsulados pela confiabilidade autovalidável proposta, foram utilizados cálculos intervalares com precisão simples (5 dígitos decimais). Para realizar a validação de intervalos com precisão dupla (15 dígitos decimais), os valores pontuais da função confiabilidade para os dois casos foram calculados na plataforma de pesquisa (16 dígitos decimais).

Verificou-se empiricamente que, considerando um determinado período de funcionamento de um dado sistema, o aumento gradual no valor de p , a partir de um certo ponto de saturação, não influencia no valor confiabilidade autovalidável obtida pelo Método de Simpson Intervalar, o que implica que sua amplitude se mantém constante. Assim, os valores de p considerados nos dois estudos de caso foram os seus respectivos pontos de saturação.

4.1 Caso 1

Seja L o sistema representado na Figura 2 composto por dois subsistemas em série: L_1 (formado unicamente pelo componente bloco0) e L_2 (formado pelos componentes bloco1 e bloco2 em configuração paralela). Considere que os blocos de L possuem distribuição Exponencial de falhas com parâmetros $\alpha_0 = 0.05$, $\alpha_1 = 0.04$ e $\alpha_2 = 0.04$, respectivamente. O valor real da função confiabilidade para L , considerando tempo de observação $t = 20$, foi calculado pelo software SHARPE e pela plataforma de pesquisa e comparado com respectivo intervalo encapsulador (Tabela 5).

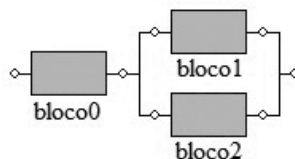


Figura 2: Representação, gerada pelo software SHARPE, de sistema L .

Observa-se que, considerando precisão simples, o intervalo obtido a partir de $R_v(20)$ encapsula o resultado, $\tilde{R}(20)$, calculado pelo SHARPE. Verifica-se também que, quando se aplica precisão dupla, o intervalo obtido encapsula o valor calculado pela plataforma de pesquisa, $R(20)$.

Tabela 5: Comparativo entre um valor da função confiabilidade real do sistema L calculado pelo SHARPE, $\tilde{R}(20)$, e pela plataforma de pesquisa, $R(20)$, e a confiabilidade autovalidável, considerando precisão simples e dupla.

$\tilde{R}(20)$	0.256324198
$R_v(20)$ (precisão simples)	[0.2563, 0.2564]
$R(20)$	0.256324198228839
$R_v(20)$ (precisão dupla)	[0.25632419822883, 0.25632419822885]

Como mencionado anteriormente, o valor de p utilizado para o cálculo de $R_v(20)$ foi o ponto de saturação observado para o sistema L , que nesse caso foi 110. Considerando cálculos realizados com precisão dupla, a amplitude da confiabilidade autovalidável em questão é igual a $1.998401444325282 \times 10^{-14}$. Entretanto, existe um custo computacional ao elevarmos o valor de p com o objetivo de reduzir a amplitude do intervalo autovalidável. De fato, tem-se que para $p = 110$, o tempo de processamento⁹ para o cálculo de $R_v(20)$ é dado por 20.363 segundos. Tal custo computacional varia linearmente com o valor p , uma vez que a Equação (2.3) é executada np vezes para a finalização do Método de Simpson Intervalar, onde n é o número de componentes do sistema em questão ($n > 1$ para sistemas complexos).

A Tabela 6 apresenta um comparativo, variando-se o valor de p , entre a amplitude da confiabilidade autovalidável e o tempo de processamento para o cálculo do intervalo encapsulador $R_v(20)$. A Figura 3 ilustra que quanto mais se eleva o valor de p , menor é a amplitude da confiabilidade autovalidável¹⁰, incorrendo em um custo computacional maior.

Tabela 6: Comparativo entre a amplitude dos intervalos obtidos para o sistema L e o tempo de cálculo do intervalo autovalidável, considerando variação do parâmetro p .

p	Amplitude	Tempo (segundos)
5	$5.706067995880915 \times 10^{-8}$	1.581879
6	$2.293140999309884 \times 10^{-8}$	1.843072
7	$1.060956000831226 \times 10^{-8}$	2.159053
8	$5.441740003053752 \times 10^{-9}$	2.383851
9	$3.019780037138986 \times 10^{-9}$	2.732301
10	$1.783159953028246 \times 10^{-9}$	2.947159

⁹Não foi possível comparar os tempos de processamento do método intervalar proposto neste artigo aos obtidos nos cálculos de valores de função confiabilidade realizados no SHARPE, visto que o software não fornece esses dados.

¹⁰Seja o intervalo $[a, b]$. A amplitude de $[a, b]$ é dada por $w([a, b]) = |b - a|$.

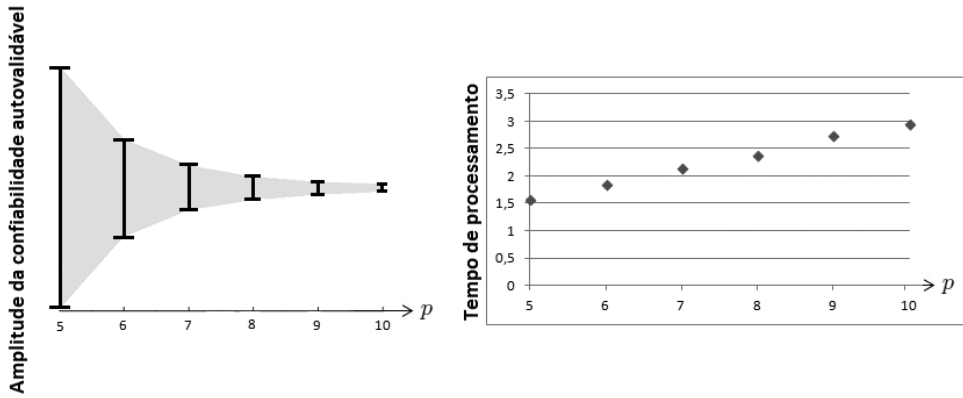


Figura 3: Custo computacional da exatidão para o Caso 1.

4.2 Caso 2

Seja W o sistema representado na Figura 4, composto por três subsistemas: W_1 (formado pelos componentes bloco0 e bloco1), W_2 (formado pelos componentes bloco2 e bloco3) e W_3 (formado pelos componentes bloco4 e bloco5). Considere que todos os blocos de W_1 e W_2 possuem distribuição Exponencial de falhas com parâmetros $\alpha = 0.002$ e que os componentes de W_3 possuem distribuição Exponencial de falhas com parâmetro $\alpha = 0.001$. Então, o valor real da função confiabilidade de W foi calculado no aplicativo SHARPE e pela plataforma de pesquisa, considerando $t = 50$, e comparado com respectiva confiabilidade autovalidável (Tabela 7).

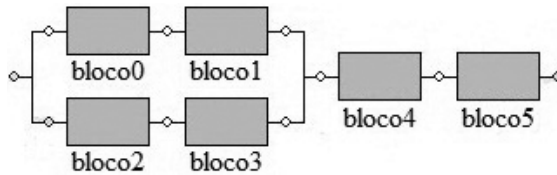


Figura 4: Representação, gerada pelo software SHARPE, do sistema W .

Tabela 7: Comparativo entre um valor da função confiabilidade real do sistema W calculado pelo SHARPE, $\tilde{R}(50)$, e pela plataforma de pesquisa, $R(50)$, e a sua confiabilidade autovalidável, considerando precisão simples e dupla.

$\tilde{R}(50)$	0.875105782
$R_v(50)$ (precisão simples)	[0.8751, 0.8752]
$R(50)$	0.875105781650802
$R_v(50)$ (precisão dupla)	[0.87510578165080, 0.87510578165081]

Considerando o sistema W , verifica-se que o valor de $\tilde{R}(50)$ calculado pelo software SHARPE é encapsulado por $R_v(50)$ para precisão simples. Assim, o erro computacional dado pela não utilização da confiabilidade autovalidável, nesse caso, pode alcançar o valor de 5.782×10^{-6} . Constata-se também que $R(50)$ é encapsulado pela confiabilidade autovalidável obtida com precisão dupla.

Para o cálculo de $R_v(50)$, utilizou-se $p = 9$ (ponto de saturação), resultando numa amplitude para a confiabilidade autovalidável de $0.9992007221626409 \times 10^{-14}$, considerando precisão dupla, e um tempo de processamento igual a 5.456664 segundos. A Tabela 8 ilustra que $p = 9$ é o ponto de saturação para o cálculo de $R_v(50)$, tendo em vista que a amplitude da confiabilidade autovalidável mantém o mesmo valor para $p > 8$. Verifica-se que para valores de p acima do ponto de saturação, o tempo de processamento para a obtenção da confiabilidade autovalidável em questão continua a crescer mesmo sem nenhuma diminuição na amplitude.

Tabela 8: Comparativo entre amplitude de intervalos obtidos para o sistema W e tempo de cálculo do intervalo autovalidável, considerando variação do parâmetro p .

p	Amplitude	Tempo (segundos)
5	$7.993605777301127 \times 10^{-14}$	2.978802
6	$3.996802888650564 \times 10^{-14}$	3.643283
7	$1.998401444325282 \times 10^{-14}$	4.249496
8	$1.998401444325282 \times 10^{-14}$	4.714201
9	$9.992007221626409 \times 10^{-15}$	5.456664
10	$9.992007221626409 \times 10^{-15}$	5.896767
11	$9.992007221626409 \times 10^{-15}$	6.499397
12	$9.992007221626409 \times 10^{-15}$	6.954819

5 CONCLUSÃO

Esta artigo apresentou um arcabouço amplo de definições de intervalos encapsuladores para a função confiabilidade real de sistemas complexos, limitando os erros computacionais inerentes aos cálculos de tais valores. Os intervalos foram obtidos utilizando exatidão máxima no sistema de ponto-flutuante implementado na máquina computacional.

Com base no conteúdo deste trabalho, pode-se afirmar que a confiabilidade autovalidável proposta é uma alternativa para a representação de valores reais da função confiabilidade de sistemas, tendo em vista que os intervalos obtidos encapsulam os resultados calculados pelo aplicativo SHARPE. As equações intervalares (2.7), (3.2) e (3.4) são contribuições originais desse trabalho.

ABSTRACT. Reliability computing results real numbers, which can generate numeric problems caused by the limitation of operating with real numbers in a discrete digital machine. This paper proposes a method, developed in Matlab using Intlab library, focused on calculating intervals that enclose real values of reliability, controlling numeric errors. The SHARPE software was used to compare real values and intervals obtained with the developed method.

Keywords: interval enclosure, real-valued reliability, reliability enclosure, exponential distribution.

REFERÊNCIAS

- [1] M.A. Campos. Interval probability: applications to discrete random variables. *TEMA – Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **1**(2) (2000), 333–343.
- [2] O. Caprani, K. Madsen & H.B. Nielsen. “Introduction to Interval Analysis”, Technical University of Denmark, Copenhagen, (2002).
- [3] F.P.A. Coolen & M.J. Newby. “Bayesian Reliability Analysis with Imprecise Prior Probabilities”, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, (1992).
- [4] C.E. Ebeling. “An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering”, Waveland Press, Illinois, (1997).
- [5] B.V. Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, **23**(1) (1991), 153–230.
- [6] P.S. Grigoletti, G.P. Dimuro & L.V. Barboza. Módulo python para matemática intervalar. *TEMA – Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **8**(1) (2007), 73-82.
- [7] C. Hirel, X. Sagner, X. Zang & K. Trivedi. “Reliability and Performability Modeling using SHARPE 2000”, 2011. (disponível em: <<http://people.ee.duke.edu/~kst/>>.)
- [8] Institute of Electrical and Electronic Engineers, IEEE standard for binary floating – Point Arithmetic. *ACM GIGPLAN Notices*, **22**, (1987), 5–48.
- [9] B.R. James. “Probabilidade: um curso em nível intermediário”, IMPA, Rio de Janeiro, (1981).
- [10] R. Klatté, U. Kulisch, C. Lawo, M. Rauch & A. Wietho. “C-XSC - A C++ class library for extended scientific computing”, Springer, Heidelberg, (1993).
- [11] U.W. Kulisch & W.L. Miranker. “Computer Arithmetic in Theory and Practice”, Academic Press, New York, (1981).
- [12] W. Kuo & M.J. Zuo. “Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications”, John Wiley & Sons Inc, New Jersey, (2003).
- [13] G. Levitin, L. Xing, H. Ben-Haim & Y. Dai. Reliability of series-parallel systems with random failure propagation time. *IEEE Transactions on Reliability*, **PP**, Issue: 99 (2013), 1–11.
- [14] The MathWorks Inc, “MATLAB 7.5”, 2007. (disponível em: <<http://www.mathworks.com/products/matlab/>>.)
- [15] R.E. Moore. “Interval Analysis”, Englewood Cliffs, New Jersey, (1966).
- [16] R.E. Moore. “Methods and Applications of Interval Analysis”, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, Philadelphia, (1979).

- [17] R.E. Moore, R.B. Kearfott & M.J. Cloud. “Introduction to Interval Analysis”, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, Philadelphia, (2009).
- [18] H. Peng, D.W. Coit & Q. Feng. Component Reliability Criticality or Importance measures for systems with degrading components. *IEEE Transactions on Reliability*, **61**, Issue: 1 (2012), 4–12.
- [19] S.M. Rump. “INTLAB 5.5 – INTerval LABoratory”, 2010. (disponível em: <www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>)
- [20] R. Sahner, K.S. Trivedi & A. Puliafito. “Performance and Reliability of Computer Systems: An Example-Based Approach Using the SHARPE Software Package”, Kluwer Academic Publishers, Boston, (1996).
- [21] M.G. Santos. “Probabilidades Autovalidáveis para as Variáveis Aleatórias Exponencial, Normal e Uniforme”, Tese de Doutorado, Centro de Informática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, (2010).
- [22] L.V. Utkin. Imprecise reliability of cold standby systems, em *International Journal of Quality & Reliability Management*, **20**, (2003), 722–739.
- [23] L.V. Utkin. Interval reliability of typical systems with partially known probabilities. *European Journal of Operational Research*, **153**(3) (2004), 790–802.
- [24] L.V. Utkin & S.V. Gurov. Imprecise reliability of general structures. *Knowledge and Information Systems*, **1**(4) (1999), 459–480.
- [25] Y. Wang. Imprecise probabilities based on generalized intervals for system reliability assessment. *International Journal of Reliability & Safety*, **1** (2009), 1–23.
- [26] J. Yang & H. Sun. Discrete method for structural interval reliability analysis. *Chinese Control and Decision Conference*, **1** (2008), 2441–2446.

A IMPLEMENTAÇÕES PARA OBTENÇÃO DE INTERVALOS AUTOVALIDÁVEIS DE PROBABILIDADES COM DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

```
% Método Intervalar utilizado para a obtenção
% de intervalo encapsulador para distribuição
% Exponencial
% a = limite inferior do intervalo
% b = limite superior do intervalo
% p = número de subdivisões do intervalo [a,b]
% alpha = parâmetro da distribuição Exponencial
function [S]=expl(a,b,p,alpha)

if (b==inf) & (a<=0)
    s = intval(1);
elseif (b==inf) & (a>0)
    syms x;
    yy = int(alpha*exp(-alpha*x));
    setround(-1);
    s1 = subs(yy,x,b) - subs(yy,x,a);
    setround(1);
    s2 = subs(yy,x,b) - subs(yy,x,a);
    setround(0);
```

```

s = infsup(s1,s2)
elseif ((a== -inf) | (a<=0)) & (b<0)
s = intval(0);
else
limiteInferior = 0;
if(a < 0)
limiteInferior = 0;
else
limiteInferior = a;
end
syms z;
yy = (alpha*exp(-alpha*z));
y = diff(yy,4);
h = (b-limiteInferior)/p;
n=1:p+1
x(n) = a + h*(n-1);
s = 0;
for i=1:p
t(i) = infsup( x(i) , x(i+1) );
m(i)=mid(t(i));
f(i)=subs(yy,z,x(i));
f(i+1) = subs(yy,z,x(i+1));
fm(i)=subs(yy,z,m(i));
x1 = subs(y,z,x(i));
x2 = subs(y,z,x(i+1));
if (x1 <= x2)
g(i) = infsup( x1 , x2 );
else
g(i) = infsup( x2 , x1 );
end
if (f(i) >= f(i+1))
s = s + rsimpson(f(i+1),f(i),fm(i),h,g(i));
else
s = s + rsimpson(f(i),f(i+1),fm(i),h,g(i));
end
end
end
S = s;
end

% Método intervalar que implementa o Método de Simpson
% Intervalar
% a = limite inferior do intervalo
% b = limite superior do intervalo
% m = ponto médio do intervalo
% d = amplitude do intervalo
% z = intervalo referente à extensão intervalar da derivada
% de ordem 4
function [rs]=rsimpson(a,b,m,d,z)
y=(d/6)*(a + 4*m + b)-((d^5)/2880)*z;
rs=y;

```