

## Um estudo de soluções para um problema de segunda ordem com múltiplos pontos de fronteira

A.L.M. MARTINEZ<sup>1</sup>, C.A.P. MARTINEZ<sup>2</sup>, T.S. PINTO<sup>3</sup> e E.V. CASTELANI<sup>4\*</sup>

Recebido em 30 setembro, 2012 / Aceito em 12 agosto, 2013

**RESUMO.** No presente artigo consideramos um problema de valor de fronteira não linear com múltiplos pontos. Dois resultados de existência de solução são estabelecidos: o primeiro utilizando a Alternativa de Leray-Schauder e o segundo utilizando o Teorema de ponto fixo de Banach. Motivados pelo segundo resultado, apresentamos um método numérico. Exemplos não clássicos são utilizados para testar o método citado.

**Palavras-chave:** alternativas de Leray-Schauder, soluções numéricas, Teorema de ponto fixo de Banach.

### 1 INTRODUÇÃO

Neste artigo apresentaremos um estudo de existência de solução considerando o seguinte problema de valor de fronteira não linear:

$$\begin{cases} u'' + f(t, u, u') = 0 \\ u(0) = 0, u(L) = g(u(\eta_1), u(\eta_2), \dots, u(\eta_{m-2})) \end{cases}, \quad (1.1)$$

onde  $L > 0$  e  $g : R^{m-2} \rightarrow R$ ,  $f : [0, L] \times R \times R \rightarrow R$  são funções contínuas e, possivelmente, não lineares. Este problema é conhecido na literatura como problema de segunda ordem com múltiplos pontos de fronteira, ou simplesmente, com  $m$ -pontos. Os primeiros resultados de existência de solução foram apresentados por II'in e Moiseev [5, 6] cuja equação considerada foi:

$$\begin{cases} u'' = f(t, u, u') \\ u(0) = 0, u(1) = \sum_{k=1}^{m-2} u(\eta_k) \end{cases}. \quad (1.2)$$

---

\*Autor correspondente: Emerson Vitor Castelani

<sup>1,2,3</sup>Coordenação de Matemática, COMAT, UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio, Av. Alberto Carazzai, 1640, 86300-000 Cornélio Procópio, PR, Brasil.

E-mails: andrelmartinez@yahoo.com.br; crismartinez@utfpr.edu.br; thiagosp@utfpr.edu.br

<sup>4</sup>Departamento de Matemática, DMA, UEM – Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 5790, 87020-900, Maringá, PR, Brasil. E-mail: emersonvitor@gmail.com

De acordo com [7], equações com múltiplos pontos surgem em problemas que modelam fluxos viscoelásticos, inelásticos e deformação de vigas. Devido à importância dessa classe de problemas em diversas aplicações, muitos autores têm desenvolvido estudos considerando variações e generalizações de (1.2). A maior parte desses estudos são relacionados à existência de solução, recomendamos as referências [3, 4, 8, 9, 10] para maior detalhamento dos resultados e técnicas utilizadas.

Em [8, 9], Ma realizou um estudo de existência de solução para duas equações com múltiplos pontos, mantendo linearidade na fronteira, onde os resultados obtidos fazem uso da Alternativa de Leray-Schauder. Posto que a equação dada em (1.1) tem condições gerais de fronteira, vamos, fazendo uso também da Alternativa de Leray-Schauder, demonstrar um resultado de existência de solução e portanto, complementar os estudos apresentados em [8, 9]. A apresentação deste resultado dar-se-á na Seção 2.

Se por um lado existem vários artigos dedicados à existência de solução, por outro lado pouca atenção é dada aos métodos numéricos, sobretudo, quando as condições de fronteira são gerais, como é o caso de (1.1). Em [2], o problema (1.1) considerando  $m = 3$  e  $L = 1$  é abordado e um resultado de existência e unicidade de solução é obtido através do Teorema de ponto fixo de Banach. Tal resultado fornece uma sequência iterativa que sob determinadas condições locais em  $f$  e  $g$  converge para a solução de (1.1). Naturalmente este resultado motiva a elaboração de métodos numéricos. Dessa forma, os estudos apresentados em [2] contemplam, ainda, a apresentação de dois algoritmos. Neste sentido, na Seção 3, apresentamos uma adaptação do Algoritmo 1 de [2] para  $m \geq 3$  e  $L > 0$  bem como uma generalização do resultado de existência e unicidade via Teorema de ponto fixo de Banach. No intuito de testar o novo algoritmo e validar o teorema, exemplos não clássicos são fornecidos.

Devido ao propósito deste trabalho precisamos introduzir o seguinte teorema.

**Teorema 1.1.** *Seja  $E$  um espaço de Banach,  $C \subset E$  um subconjunto fechado e convexo,  $\Omega$  um conjunto aberto em  $C$  e  $p \in \Omega$ . Então cada função contínua  $T : \overline{\Omega} \rightarrow C$  admite pelo menos uma das propriedades seguintes:*

(A1)  $T$  possui um ponto fixo em  $\overline{\Omega}$ .

(A2) Existe  $u \in \partial\Omega$  e  $\lambda \in (0, 1)$  tal que  $u = \lambda T(u) + (1 - \lambda)p$ .

Este resultado é conhecido como Alternativa de Leray-Schauder. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [1].

## 2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Seja  $E = C^1[0, L]$  o espaço de Banach de todas as funções continuamente diferenciáveis em  $[0, L]$  com a norma

$$\|u\|_E = \max\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\}.$$

Iniciamos esta seção observando que as soluções de (1.1) podem ser escritas como

$$u(x) = \int_0^L G(x, t) f(t, u(t), u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \frac{x}{L},$$

onde  $G$  é a função de Green

$$G(x, t) = \begin{cases} t(L-x)L^{-1}, & 0 \leq t \leq x \leq L \\ x(L-t)L^{-1}, & 0 \leq x \leq t \leq L \end{cases}.$$

Assim,  $u$  é uma solução de (1.1) se, e somente se,  $u$  é um ponto fixo do operador  $T : E \rightarrow E$  definido por:

$$(Tu)(x) = \int_0^L G(x, t) f(t, u(t), u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \frac{x}{L}. \tag{2.1}$$

Vamos detalhar algumas propriedades de  $G$ . Note que

$$\partial_x G(x, t) = \begin{cases} -tL^{-1}, & 0 \leq t \leq x \leq L \\ (L-t)L^{-1}, & 0 \leq x \leq t \leq L \end{cases}.$$

Assim,  $G$  satisfaz:

$$G(x, t) = |\partial_x G(x, t)| \leq L |\partial_x G(x, t)|. \tag{2.2}$$

Utilizando (2.2), podemos verificar importantes propriedades do operador definido em (2.1). De fato, para cada  $x \in [0, L]$  temos:

$$\begin{aligned} |(Tu)'(x)| &= \left| \int_0^L \partial_x G(x, t) f(t, u(t), u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) L^{-1} \right| \\ &\leq \int_0^L |\partial_x G(x, t)| |f(t, u(t), u'(t))| dt + |g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))| L^{-1}. \end{aligned}$$

Então,

$$|(Tu)'(x)| \leq \int_0^L |\partial_x G(x, t)| |f(t, u(t), u'(t))| dt + |g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))| L^{-1}. \tag{2.3}$$

**Observação 1.** Note que se  $u \in E$ , então  $Tu$  satisfaz  $(Tu)(0) = 0$ . Assim, temos que  $L \| (Tu)' \|_\infty \geq \| Tu \|_E$ .

Para garantir a existência de solução de (1.1) precisamos da seguinte hipótese:

(H1) Existem constantes positivas  $\alpha, A, B$  tais que:

- $\max_{(t,u,v) \in [0,L] \times [-\alpha,\alpha] \times [-\alpha,\alpha]} \{|f(t, u, v)|\} \leq \frac{\alpha A}{L d_1}$ , onde  $d_1 = \max_{x \in [0,L]} \left\{ \int_0^L |\partial_x G(x, t)| dt \right\}$ ;
- $|g(y)| \leq \frac{\alpha B}{L}, \forall y \in [0, \alpha]^{m-2}$ ;
- $A + B \leq 1$ .

**Teorema 2.1.** Suponha que (H1) ocorre. Então (1.1) possui solução  $u^* \in E$  tal que  $\|u^*\|_E \leq \alpha$ .

**Demonstração.** Utilizaremos o Teorema 1.1 com  $p = 0$  e  $\Omega = \{u \in E; \|u\|_E < \alpha\}$ . Observe que o operador  $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$  é completamente contínuo pelo teorema Arzelà-Ascoli. Agora, suponha que exista  $u \in \partial\Omega$  e  $\lambda \in (0, 1)$  com  $u(x) = \lambda Tu(x)$ . De acordo com a observação 1 e utilizando (H1) e (2.3) obtemos:

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_E &< \|(Tu)(x)\|_E \leq L\|(Tu)'\|_\infty \\ &\leq L \max_{x \in [0, L]} \left\{ \int_0^L |\partial_x G(x, t) f(t, u(t), u'(t))| dt + |g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))| \right\} \\ &\leq L \left\{ \frac{\alpha A}{Ld_1} \int_0^L |\partial_x G(x, t)| dt + \frac{\alpha B}{L} \right\} \\ &\leq \alpha A + \alpha B \\ &\leq \alpha. \end{aligned}$$

Portanto,  $\|u\|_E < \alpha$ . Dessa forma, a conclusão (A2) do Teorema 1.1 não pode acontecer. Consequentemente, concluímos que (A1) deve ocorrer. Assim, existe  $u^* \in E$  tal que  $\|u^*\|_E \leq \alpha$ . □

**Exemplo 1.** Neste exemplo, vamos considerar os elementos que definem o problema (1.1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(t, u, v) &= \frac{t}{3} - \frac{3}{300}u^2 + \frac{1}{60}v^2, \\ g(y_1, y_2, y_3) &= \frac{1}{160}(y_1 y_2 + y_3^2), \\ L &= 2. \end{aligned}$$

Escolhendo as constantes

$$\alpha = 10, \quad A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad d_1 = \max_{x \in [0, 2]} \left\{ \int_0^2 |\partial_x G(x, t)| dt \right\} = 1,$$

podemos verificar que as condições impostas em (H1) são satisfeitas e portanto, existe uma solução  $u \in E$  tal que  $\|u\|_E \leq \alpha$ . De fato,

- $\max_{(t, u, v) \in [0, L] \times [-10, 10] \times [-10, 10]} \left\{ \left| \frac{t}{3} - \frac{3}{300}u^2 + \frac{1}{60}v^2 \right| \right\} \leq \frac{2}{3} + 1 + \frac{5}{3} = \frac{10}{3} = \frac{\alpha A}{Ld_1};$
- $\left| \frac{1}{160}(y_1 y_2 + y_3^2) \right| \leq \frac{1}{160}(100 + 10^2) = \frac{10}{8} = \frac{\alpha B}{L}, \quad \forall y \in [0, 10]^3;$
- $A + B = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \leq 1.$

### 3 SOLUÇÕES ITERATIVAS

Nesta seção apresentamos um resultado que mostra a existência e unicidade de solução pelo Teorema do ponto fixo de Banach. Embora clássico, este estudo é muito importante a fim de estabelecer algoritmos para resolver o problema proposto. Começamos esta seção, considerando a sequência iterativa:

$$u^{k+1} = T(u^k),$$

$$u^{k+1}(x) = \int_0^L G(x, t) f(u^k(t), u'^k(t)) dt + g(u^k(\eta_1), \dots, u^k(\eta_{m-2})) \frac{x}{L}.$$

Para demonstrar a existência de limite da sequência definida acima, precisamos das seguintes hipóteses.

(H2) Existem constantes  $\lambda_f > 0$  e  $\lambda_g > 0$  tais que

$$|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| \leq \lambda_f \max\{|u_1 - u_2|, |v_1 - v_2|\},$$

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq \lambda_g |y_1 - y_2|,$$

para todo  $t \in [0, L]$ ,  $u_1, v_1, u_2, v_2 \in [-\alpha, \alpha]$  e  $y_1, y_2 \in [-\alpha, \alpha]$ .

(H3)  $Ld_1\lambda_f + \lambda_g < 1$ .

**Teorema 3.1.** *Suponha que (H1), (H2) e (H3) ocorrem. Então (1.1) possui uma solução única  $u$  tal que,  $\|u\|_E \leq \alpha$ . Além disso, esta solução é o limite da sequência iterativa  $u^{k+1} = T(u^k)$ .*

**Demonstração.** Para mostrarmos que  $T$  aplica  $\overline{\Omega}$  em  $\overline{\Omega}$ , onde  $\Omega = \{u \in E; \|u\|_E < \alpha\}$ , basta procedermos de maneira similar à demonstração do Teorema 2.1. Desta forma, resta demonstrar apenas que  $T$  é uma contração. De fato:

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_E &\leq L\|(Tu - Tv)'\|_\infty \\ &= L \max_{x \in [0, L]} \left\{ \left| \int_0^L \partial_x G(x, t) [f(t, u(t), u'(t)) - f(t, v(t), v'(t))] dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + L^{-1} [g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) - g(v(\eta_1), \dots, v(\eta_{m-2}))] \right| \right\}. \end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar (H2) e conseqüentemente obtemos:

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_E &\leq L \max_t d_1 |f(t, u(t), u'(t)) - f(t, v(t), v'(t))| \\ &\quad + L^{-1} |g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) - g(v(\eta_1), \dots, v(\eta_{m-2}))| \\ &\leq Ld_1\lambda_f \max_t \{|u(t) - v(t)|, |u'(t) - v'(t)|\} + L^{-1}\lambda_g \max_t \{|u(t) - v(t)|\} \\ &\leq (Ld_1\lambda_f + \lambda_g) \|u - v\|_E. \end{aligned}$$

Finalmente, segue de (H3) que  $T$  é uma contração e portanto, pelo do Teorema de ponto fixo de Banach, temos o resultado.  $\square$

O último teorema nos permite estabelecer as condições para a convergência local de algoritmos que utilizam a sequência iterativa:

$$u^{k+1} = T(u^k).$$

Neste sentido, apresentamos a seguir, um método numérico que estende o Algoritmo 1 apresentado em [2].

### Algoritmo A

1. Defina uma malha uniformemente espaçada  $\{x_j\}$  em  $[0, L]$ .
2. Escolha uma aproximação inicial  $u_j^0 = u^0(x_j)$ .
3. Para  $k = 1, 2, 3, \dots$ 
  - (a) Calcule  $u^k(\eta_1), u^k(\eta_2), \dots, u^k(\eta_{m-2})$  usando interpolação por spline cúbica.
  - (b) Calcule  $u_j^k$  utilizando diferenças finitas (central).
  - (c) Calcule  $u_j^{k+1}$  usando

$$u^{k+1} = T(u^k)$$

onde as integrais (dadas por (8)) são calculadas através da regra de trapézios.

4. Teste a convergência.

**Observação 2.** Note que, quando consideramos o Algoritmo A com  $m = 3$  e  $L = 1$  este Algoritmo fica reduzido ao Algoritmo 1.

**Exemplo 2.** Neste exemplo, vamos considerar os termos que definem o problema (1.1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x, u, u') &= u(u^2 + v^2) \\ g(y) &= 0.591470984807897 + y^2 \\ \eta &= \frac{\pi}{6}, \quad L = 1. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.** Neste exemplo, vamos considerar os termos que definem o problema (1.1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x, u, u') &= u(u^2 + v^2) \\ g(y) &= 0.420735492403948 + 0.392943630388474y_1 + 0.472478473157369y_2 \\ \eta &= \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right], \quad L = 1. \end{aligned}$$

A solução exata, tanto no Exemplo 2 como no Exemplo 3, é  $u(x) = \sin(x)$ .

**Exemplo 4.** Neste exemplo, vamos considerar os termos que definem o problema (1.1) da seguinte forma:

$$f(x, u, u') = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - 1$$

$$g(y) = g = 1.267949192431123 - y_1^2 - y_2^2$$

$$\eta = \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right], \quad L = \frac{\pi}{2}.$$

A solução exata é  $u(x) = 1 - \cos(x)$ .

Os resultados numéricos são apresentados nas Tabelas 1, 2 e 3, onde foi considerado

$$\varepsilon_u^k = \|u^k - u\|_\infty, \quad \bar{\varepsilon}^k = \frac{\|u^{k+1} - u_k\|_\infty}{\|u^{k+1}\|_\infty}.$$

Tabela 1: Resultados numéricos do Exemplo 2.

Iteração	$\varepsilon_u^k$	$\bar{\varepsilon}^k$
5	0.104274	1.00
10	0.0247266	0.00876739
20	0.00271163	0.000704763
30	0.00066578	7.29247e-005

Tabela 2: Resultados numéricos do Exemplo 3.

Iteração	$\varepsilon_u^k$	$\bar{\varepsilon}^k$
5	0.0671936	5.137238e-002
10	0.0117927	5.577779e-003
20	0.000481793	1.149634e-004
30	0.000252443	2.476774e-006

Tabela 3: Resultados numéricos do Exemplo 4.

Iteração	$\varepsilon_u^k$	$\bar{\varepsilon}^k$
5	0.0975848	0.354546
10	0.000590561	0.0010789
20	0.000668992	1.06062e-007
30	0.000668979	2.54909e-011

Agora podemos fazer um teste adicional. De acordo com o Teorema 2.1 podemos afirmar que o Exemplo 1 possui solução, mas não conhecemos esta solução. Vamos aplicar o Algoritmo A neste problema com o intuito de encontrar uma aproximação para esta solução. Neste sentido, vamos considerar

$$\frac{\|u^{k+1} - u^k\|_\infty}{\|u^{k+1}\|_\infty} < 10^{-4}$$

como critério de parada para o algoritmo.

Testando o Exemplo 1 com  $\eta = (0.25 \ 0.5 \ 0.75)$  e  $n = 20$ , o Algoritmo A teve seu critério de parada satisfeito após 5 iterações. Os resultados numéricos são apresentados na Tabela 4 e o gráfico da solução obtida é mostrado na Figura 1. Ainda, podemos observar que a solução encontrada pelo algoritmo no Exemplo 1 aparentemente verifica a condição  $\|u\|_E \leq \alpha$ , o que sugere ser esta a solução garantida pelo Teorema 2.1.

Tabela 4: Resultados numéricos do Exemplo 1.

Iteração	$\bar{\varepsilon}^k$
1	1
2	0.051025494400273
3	0.001235548897557
4	0.000029528221908
5	0.000000705096341

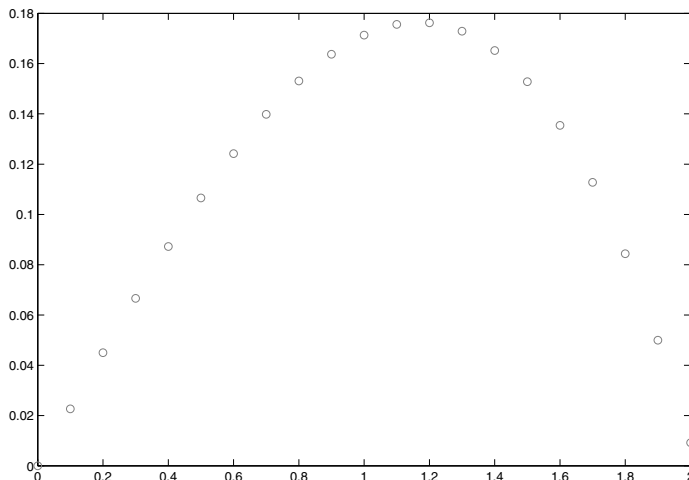


Figura 1: Solução numérica obtida do Exemplo 1.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos um resultado teórico de existência de solução para o problema (1.1) utilizando a Alternativa de Leray-Schauder. Também, analisamos a existência de soluções



iterativas e exploramos exemplos com condições não lineares para testar o algoritmo estudado. O desempenho do algoritmo nos exemplos testados é promissor, no sentido de que todas as soluções foram encontradas. Embora a técnica de cálculo de integrais utilizada seja simples, nós pudemos identificar que ao modificar o algoritmo com outras técnicas de integração (extrapolação e via spline) a precisão dos resultados e ordem de convergência foram pouco alteradas. Isto se deve a dois fatores: diferenças finitas (que limitam a qualidade da solução) e a proximidade dos valores de  $\eta$  do extremo  $L$  pois neste, o valor da solução é desconhecido, enquanto que próximo de 0 o valor da solução é fixo ( $u(0) = 0$ ).

**ABSTRACT.** In this paper we consider a nonlinear order multi-point boundary value problem. Two results of existence of solution are established: the first using Alternative of Leray-Schauder's type and the second using the Banach fixed point theorem. Motivated by the second result, we present a numerical method. Nonclassical examples are used to test the method cited.

**Keywords:** alternative of Leray-Schauder, numerical solutions, Banach fixed point theorem.

## REFERÊNCIAS

- [1] R.P. Agarwal, M. Meehan & D. O'Regan. "Fixed Point Theory and Applications". Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [2] E.V. Castelani & T.F. Ma. Numerical solutions for a three-point boundary value problem. *Communications in Applied Analysis*, **11**(1) (2007), 87–96.
- [3] C.P. Gupta. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, **168**(2) (1992), 540–551.
- [4] C.P. Gupta & S.I. Trofimchuk. A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem. *J. Math. Anal. Appl.*, **205**(2) (1997), 586–597.
- [5] V.A. Il'in & E.I. Moiseev. Nonlocal boundary-value problem of the second kind for a Sturm-Liouville operator. *Differential Equations*, **23** (1987), 979–987.
- [6] V.A. Il'in & E.I. Moiseev. A nonlocal boundary value problem for the Sturm-Liouville operator in the differential and difference treatments. *Sov. Math. Dokl.*, **34** (1987), 507–511.
- [7] Y. Lin & M. Cui. A numerical solution to nonlinear multi-point boundary value problems in the reproducing kernel space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **34** (2011), 44–47.
- [8] R. Ma. Existence theorems for a second order  $m$ -point boundary value problem. *J. Math. Anal. Appl.*, **211** (1997), 545–555.
- [9] R. Ma. Existence theorems for a second order three point boundary value problem. *J. Math. Anal. Appl.*, **212** (1997), 430–442.
- [10] P.J.Y. Wong & R.P. Agarwal. Existence and uniqueness of solutions for three-point boundary value problems for second order difference equations. *Proceedings of Dynamic Systems and Applications*, Atlanta, United States of America, (1995), 553–560.