TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **13**, No. 1 (2012), 25-36.
doi: 10.5540/tema.2012.013.01.0025

Termodinâmica Estendida para Materiais Viscoelásticos com Condução de Calor

A. VIGNATTI[1], Departamento de Engenharia e Ciências Exatas da UFES, 29933-480 São Mateus, ES, Brasil.

I-SHIH LIU[2], Instituto de Matemática da UFRJ, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo. Nesse artigo será apresentada uma formulação de termodinâmica estendida para materiais viscoelásticos com condução de calor. O requerimento da invariância Galileana sobre as equações de balanço e o princípio de entropia conduzem à introdução de multiplicadores de Lagrange, que estabelecem equações constitutivas para os fluxos. Uma condição de hiperbolicidade do sistema de equações é obtido por meio da concavidade da densidade de entropia.

1. Introdução

A termodinâmica estendida é uma teoria que complementa as leis usuais de conservação de massa, momento e energia, empregadas na termodinâmica clássica, com um conjunto de equações de balanço adicionais que envolvem o fluxo de calor. Em um total de 13 equações de balanço são determinados 13 momentos: densidade, velocidade, tensor tensão e fluxo de calor [9], [12].

A termodinâmica estendida tem sido aplicada a gases [3], [11], [12], assim como fluidos [10], [13] e sólidos viscoelásticos [6],[7],[8]. Em particular, Vignatti e Liu [13] consideraram a energia como um campo independente e aumentaram a equação da energia total, resultando em um sistema de 14 equações de balanço. O requerimento da invariância Galileana sobre o sistema de equações implica na decomposição dos momentos e fluxos como produtos de duas funções em que uma delas independe do campo velocidade [9], [15].

Este artigo dá continuidade ao trabalho apresentado em [13], seguindo o procedimento nas referências ali citadas. A diferença significativa do artigo [13] para este está na inclusão da equação (3.2), o que caracteriza a teoria para sólidos. Admitindo a concavidade da densidade entropia, foi possível mostrar a positividade do calor específico, a volume constante.

Será usada a mesma notação indicial utilizada em [13]. Em particular $A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$ e o símbolo $\langle\rangle$ indica a simetrização sem traço $A_{\langle ij\rangle} = A_{(ij)} - \frac{1}{3}A_{ss}\delta_{ij}$.

[1]aldovignatti@ceunes.ufes.br
[2]liu@im.ufrj.br

Recebido em 16 Junho 2011; Aceito em 09 Dezembro 2011.

2. Equações de Balanço

As leis de conservação de massa, momento e energia em um sistema de coordenadas espaciais (x_i, t) relativo a um referencial inercial, podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \varrho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho v_i v_k - T_{ik}) &= 0, \\ \frac{\partial \varrho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho e v_k - v_i T_{ik} + q_k) &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde ϱ é a densidade de massa, v_i a velocidade, T_{ik} o tensor tensão de Cauchy, q_k o fluxo de energia, $e = (v^2/2 + \varepsilon)$ é a energia total específica e ε a energia interna específica.

A fim de obter um modelo matemático hiperbólico para materiais viscoelásticos com condução de calor são acrescentadas as equações de balanço

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_{ij} v_k + G_{ijk}) &= P_{ij}, \\ \frac{\partial u_{iij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_{iij} v_k + G_{iijk}) &= P_{iij}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

para os momentos u_{ij}, u_{iij}, seus fluxos G_{ijk}, G_{iijk} e produções P_{ij} e P_{iij}. Estas equações são acrescentadas para ser construída uma teoria estendida de 14 momentos para materiais viscoelásticos com condução de calor, por exemplo sólidos. Ao contrário das teorias ordinárias a inclusão das equações (2.2) para u_{ij} e u_{iij} são particulares da teoria estendida. Elas não são leis de conservação devido à presença dos termos de produção P_{ij} e P_{iij} no membro direito.

Analogamente a [13], as partes independentes da velocidade, conhecidas como partes internas dos momentos u_{ij} e u_{iij} serão denotadas por ϱ_{ij} e ϱ_{iij}, dos fluxos G_{ijk} e G_{iijk} por p_{ijk} e p_{iijk} das produções P_{ij} e P_{iij} por π_{ij} e π_{iij}, respectivamente.

Motivado pela teoria cinética de gases, os termos $u_{ij}, G_{ijk}, P_{ij}, u_{iij}, G_{iijk}$, P_{iij} serão admitidos simétricos nos índices i, j. Será admitido ainda que $\pi_0 = 0, \pi_i = 0$ e que as quantidades ϱ_{ij}, $p_{ij} = -T_{ij}$, p_{ijk}, π_{ij}, p_{iik}, p_{iijk}, π_{iij} assim como ϱ, ε, T_{ik}, q_k são quantidades objetivas.

O requerimento da invariância Galileana implica na dependência explícita da velocidade v_i[15] (para mais detalhes, ver [12]), e portanto o sistema (2.1) e (2.2) pode ser escrito no sistema de coordenadas materiais como

$$
\begin{aligned}
\dot{\varrho}_\kappa &= 0, \\
\varrho_\kappa \dot{v}_i + \frac{\partial \hat{p}_{i\alpha}}{\partial X_\alpha} &= 0, \\
\varrho_\kappa \dot{e} + \frac{\partial \hat{G}_\alpha}{\partial X_\alpha} &= 0, \\
\dot{\hat{u}}_{ij} + \frac{\partial \hat{G}_{ij\alpha}}{\partial X_\alpha} &= \varrho_\kappa \pi_{ij}, \\
\dot{\hat{u}}_{iij} + \frac{\partial \hat{G}_{iij\alpha}}{\partial X_\alpha} &= \varrho_\kappa \pi_{iij} + 3\varrho_\kappa v_{(i}\pi_{ij)},
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{ij} &= \varrho_\kappa \varrho_{ij} + \varrho_\kappa v_i v_j, \\
\hat{u}_{iij} &= \varrho_\kappa \varrho_{iij} + 3\varrho_\kappa \varrho_{(ii} v_{j)} + \varrho_\kappa v_i v_i v_j, \\
\hat{G}_\alpha &= \hat{q}_\alpha + v_i \hat{p}_{i\alpha}, \\
\hat{G}_{ij\alpha} &= \hat{p}_{ij\alpha} + v_i \hat{p}_{j\alpha} + v_j \hat{p}_{i\alpha}, \\
\hat{G}_{iijk} &= \hat{p}_{iijk} + 3v_{(i} v_i \hat{p}_{j)k} + 3v_{(i}\hat{p}_{ij)k},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

O sistema (2.3) é equivalente ao sistema de equações de balanço consistindo de (2.1) e (2.2). O tensor $\hat{T}_{i\alpha} = -\hat{p}_{i\alpha}$ é o tensor tensão Piola-Kirchoff e $\hat{q}_\alpha$ é algumas vezes chamado por fluxo de energia material.

Para materiais viscoelásticos, um estado pode ser caracterizado pelos seguintes campos termodinâmicos:

$$
\begin{array}{ll}
F_{i\alpha} & \text{gradiente de deformação,} \\
v_i & \text{velocidade,} \\
\varepsilon & \text{energia interna específica,} \\
T_{ij} & \text{tensor tensão,} \\
q_j & \text{fluxo de calor.}
\end{array}
\tag{2.5}
$$

Obviamente, o gradiente de deformação está sendo considerado no lugar da densidade, como um campo termodinâmico para que os sólidos possam ser incluídos na teoria.

O sistema (2.3) deve ser completado por relações constitutivas que em termodinâmicas estendidas são assumidas serem locais e instantâneas.

Equações constitutivas não são inteiramente arbitrárias. Elas estão restritas por um princípio físico universal e, em particular o princípio de entropia e objetividade material. Mais a frente será imposta uma condição de hiperbolicidade.

3. Princípio de Entropia

O princípio de entropia estabelece que para todo processo termodinâmico a inequação de entropia deve ser válida

$$
\varrho_\kappa \dot{\eta} + \frac{\partial \hat{\Phi}_\alpha}{\partial X_\alpha} = s \geq 0. \tag{3.1}
$$

Esta também está escrita no sistema de coordenadas materiais e similarmente é introduzido $\hat{\Phi}_\alpha = (\varrho_\kappa/\varrho)\Phi_\kappa F^{-1}_{\alpha k}$, onde Φ_κ é o fluxo de entropia. Além disso, a função η é admitida ser côncava nas variáveis-campo básicas e tanto η quanto $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ são admitidas ser objetivas. A produção de entropia s é uma quantidade não negativa.

Observe que os campos $F_{s\alpha}$ e v_s não são inteiramente independentes. De acordo com suas definições, eles estão relacionados pela seguinte identidade

$$\dot{F}_{s\alpha} - \frac{\partial v_s}{\partial X_\alpha} = 0. \tag{3.2}$$

Observe ainda que a primeira equação de (2.3), $\dot{\varrho}_\kappa = 0$, meramente afirma que ϱ_κ é um campo independente do tempo. Juntando as outras equações de (2.3) com (3.2) obtém-se um sistema que pode ser escrito na forma

$$A_{ab}Y_b + B_a = 0.$$

Isto e a objetividade de η e $\hat{\Phi}_\alpha$ implicam na existência de multiplicadores de Lagrange [5] $\lambda_{i\beta}, \Lambda, \Lambda_{ij}, \lambda_j, \Lambda_i$ tais que

$$\begin{aligned} d\eta = {} & \lambda_{i\beta} dF_{i\beta} + \Lambda d\varepsilon + \Lambda_{rl} d\varrho_{rl} + \lambda_l d\varrho_{rrl}, \\ 0 = {} & \Lambda_i + 3\lambda_{(i}\varrho_{rr)}, \\ d\hat{\Phi}_\alpha = {} & \Lambda d\hat{q}_\alpha + \Lambda_i d\hat{p}_{i\alpha} + \Lambda_{ij} d\hat{p}_{ij\alpha} + \lambda_j d\hat{p}_{iij\alpha}, \\ 0 = {} & -\varrho_\kappa \lambda_{i\alpha} + \Lambda \hat{p}_{i\alpha} + 2\Lambda_{ij}\hat{p}_{j\alpha} + 3\lambda_{(j}\hat{p}_{ij)\alpha}, \\ s = {} & \varrho_\kappa \left(\Lambda_{rl}\pi_{rl} + \lambda_l \pi_{rrl}\right) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

4. Equilíbrio

O *equilíbrio* é definido como um processo termodinâmico sem produção de entropia. De acordo com [13], temos que a condição necessária para o mínimo da produção de entropia implica que

$$0 = \frac{\partial s}{\partial \pi_{ij}}|_E = \varrho_\kappa \Lambda_{ij}|_E, \qquad 0 = \frac{\partial s}{\partial \pi_{iij}}|_E = \varrho_\kappa \lambda_j|_E. \tag{4.1}$$

Tanto $|_E$ quanto o índice o denotarão a avaliação no equilíbrio. De $(3.3)_2$ tem-se $\Lambda_k|_E = 0$.

Avalie a relação $(3.3)_1$ no equilíbrio e use $(3.3)_4$ para ter

$$d\eta|_E = \lambda_{i\beta}|_E dF_{i\beta} + \Lambda|_E d\varepsilon = \Lambda|_E \left(d\varepsilon + \frac{1}{\varrho_\kappa}\hat{p}^o_{i\beta} dF_{i\beta}\right). \tag{4.2}$$

Comparando com a relação de Gibbs[14]

$$d\eta_o = \frac{1}{\theta}\left(d\varepsilon + \frac{1}{\varrho_\kappa}\hat{p}^o_{i\beta} dF_{i\beta}\right), \tag{4.3}$$

para materiais elásticos, decorrente da teoria ordinária [9], tem-se as identificações

$$\Lambda|_E = \frac{1}{\theta}, \tag{4.4}$$

onde θ é a temperatura. Por $(3.3)_4$

$$\lambda_{i\beta}|_E = \frac{1}{\theta \varrho_\kappa} \hat{p}^o_{i\beta}. \tag{4.5}$$

Cada um dos termos, definidos abaixo,

$$\begin{aligned} \Lambda_\varepsilon = & \quad \Lambda - \frac{1}{\theta}, \qquad \Lambda^\varepsilon_{i\beta} = \quad \lambda_{i\beta} - \frac{1}{\theta \varrho_\kappa} \hat{p}^o_{i\beta}, \\ \hat{S}_{ij} = & \quad \hat{p}^o_{ij} - \hat{p}_{ij}, \qquad \varrho_\varepsilon = \quad \varrho_{ss} - \varrho_{ss}|_E, \end{aligned} \tag{4.6}$$

se anula no equilíbrio e $\Lambda_\varepsilon, \Lambda^\varepsilon_{i\beta}$ herdarão o nome de multiplicadores de Lagrange.

Analogamente a [13], a função

$$\hat{\eta} = \Lambda_{\langle ij \rangle} \varrho_{\langle ij \rangle} + \lambda_j \varrho_{iij} - \eta, \tag{4.7}$$

e a conjugada do fluxo de entropia $\hat{\Phi}_k$

$$\check{\Phi}_k = \quad \Lambda \hat{q}_k + \Lambda_i \hat{p}_{ik} + \Lambda_{ij} \hat{p}_{ijk} + \lambda_j \hat{p}_{iijk} - \hat{\Phi}_k, \tag{4.8}$$

satisfazem

$$\begin{aligned} d\hat{\eta} = & \quad \left(\Lambda^\varepsilon_{i\beta} + \Lambda_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial F_{i\beta}} + \frac{\partial \eta_0}{\partial F_{i\beta}} + \frac{1}{3} \Lambda_{rr} \frac{\partial \varrho_{ss}|_E}{\partial F_{i\beta}} \right) dF_{i\beta} \\ & + \left(\Lambda_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta_0}{\partial \theta} + \frac{1}{3} \Lambda_{rr} \frac{\partial \varrho_{ss}|_E}{\partial \theta} \right) d\theta + \frac{1}{3} \Lambda_{rr} d\varrho_\varepsilon + \varrho_{\langle ij \rangle} d\Lambda_{\langle ij \rangle} + \varrho_{iij} d\lambda_j, \\ d\check{\Phi}_k = & \quad -\frac{1}{\theta^2} \hat{q}_k d\theta + \hat{q}_k d\Lambda_\varepsilon + \hat{p}_{ik} d\Lambda_i + \hat{p}_{\langle ij \rangle k} d\Lambda_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{3} \hat{p}_{iik} d\Lambda_{jj} + \hat{p}_{iijk} d\lambda_j. \end{aligned} \tag{4.9}$$

e assumindo que ϱ_ε, Λ_ε, Λ_i, $\Lambda_{\langle ij \rangle}$, Λ_{jj} e λ_j são quantidades de ordem 1, obtem-se (veja [9]),

$$\begin{aligned} \hat{\eta} = & \quad \eta_0 + k_0 \varrho_\varepsilon + h_1 \lambda_j \lambda_j + h_2 \Lambda_{\langle ij \rangle} \Lambda_{\langle ij \rangle} + h_3 \varrho_\varepsilon^2 + o(3), \\ \check{\Phi}_k = & \quad \alpha \lambda_k + \beta \Lambda_k + a_1 \Lambda_\varepsilon \lambda_k + b_1 \Lambda_\varepsilon \Lambda_k + a_2 \Lambda_{\langle ki \rangle} \lambda_i + b_2 \Lambda_{\langle ki \rangle} \Lambda_i \\ & \quad + a_3 \Lambda_{ii} \lambda_k + b_3 \Lambda_{ii} \Lambda_k + o(3), \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde os coeficientes $\eta_0, k_0, h_n, \alpha, \beta, a_n, b_n$, são funções de $(F_{i\beta}, \theta)$. A notação $o(n)$ representa termos de ordem maior ou igual a n nas quantidades Λ_ε, Λ_i, $\Lambda_{\langle ij \rangle}$, Λ_{jj} e λ_j.

5. Equações Constitutivas de Primeira Ordem

Comparando (4.9) com $(4.10)_1$ obtem-se as expressões

$$
\begin{aligned}
\varrho_{iij} &= 2h_1\lambda_j + o(2),\\
\frac{1}{3}\Lambda_{rr} &= k_0 + 2h_3\varrho_\varepsilon + o(2),\\
\varrho_{\langle ij\rangle} &= 2h_2\Lambda_{\langle ij\rangle} + o(2),\\
\Lambda_\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} + \frac{1}{3}\Lambda_{rr}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta} &= \frac{\partial k_0}{\partial\theta}\varrho_\varepsilon + o(2),\\
\Lambda^\varepsilon_{i\beta} + \Lambda_\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{i\beta}} + \frac{1}{3}\Lambda_{rr}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial F_{i\beta}} &= \frac{\partial k_0}{\partial F_{i\beta}}\varrho_\varepsilon + o(2),
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

para os multiplicadores de Lagrange. A equação $(5.1)_2$ avaliada no equilíbrio revela que $k_0 = 0$, e como conseqüência

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\varepsilon &= -2c_\theta h_3\varrho_\varepsilon + o(2),\\
\Lambda^\varepsilon_{i\beta} &= \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{i\beta}}c_\theta - \frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial F_{i\beta}}\right)2h_3\varrho_\varepsilon + o(2),
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

onde, $c_\theta = \left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\right)^{-1}\dfrac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta}$. Usando $(3.3)_2$ encontra-se

$$
\Lambda_i = -\frac{5}{6}\frac{\varrho_{ss}|_E}{h_1}\varrho_{jji} + o(2). \tag{5.3}
$$

Comparando (4.9) com $(4.10)_2$ obtem-se as expressões

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\theta^2}\hat{q}_k &= \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\lambda_k + \frac{\partial\beta}{\partial\theta}\Lambda_k + o(2),\\
\hat{q}_k &= a_1\lambda_k + b_1\Lambda_k + o(2),\\
\hat{p}_{ik} &= \beta\delta_{ik} + b_1\Lambda_\varepsilon\delta_{ik} + b_2\Lambda_{\langle ki\rangle} + b_3\Lambda_{jj}\delta_{ik} + o(2),\\
\hat{p}_{\langle ij\rangle k} &= a_2\delta_{k\langle i}\lambda_{j\rangle} + b_2\delta_{k\langle i}\Lambda_{j\rangle} + o(2),\\
\frac{1}{3}\hat{p}_{iik} &= a_3\lambda_k + b_3\Lambda_k + o(2),\\
\hat{p}_{iijk} &= (\alpha + a_1\Lambda_\varepsilon)\,\delta_{kj} + a_2\Lambda_{\langle kj\rangle} + a_3\Lambda_{ii}\delta_{kj} + o(2),\\
0 &= \frac{\partial\check{\Phi}_k}{\partial F_{i\beta}} = \frac{\partial\alpha}{\partial F_{i\beta}}\lambda_k + \frac{\partial\beta}{\partial F_{i\beta}}\Lambda_k + o(2),
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

para os fluxos. Já é sabido, $(4.6)_1$ e $(4.1)_1$, que os multiplicadores de Lagrange $\Lambda_\varepsilon, \Lambda_{ij}$ se anulam no equilíbrio. Logo

$$
\hat{p}^o_{ik} = \beta\delta_{ik} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{3}\hat{p}^o_{ss}. \tag{5.5}
$$

As duas primeiras equações de (5.4), implicam

$$-\frac{1}{\theta^2}\hat{q}_k = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\right)\lambda_k + o(2) \quad \text{e} \quad \hat{q}_k = \left(a_1 - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E b_1\right)\lambda_k + o(2).$$

Substituindo uma na outra, tem-se

$$0 = \frac{\partial\alpha}{\partial F_{i\beta}} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial\beta}{\partial F_{i\beta}}. \tag{5.6}$$

O traço e a parte simetrizada sem traço da equação $(3.3)_4$, fornecerão relações de interesse. Ao calcular a simetrização sem traço de cada um dos membros de $(3.3)_4$, será obtida a equação

$$0 = -\varrho_\kappa\lambda_{\langle ik\rangle} + \Lambda\hat{p}_{\langle ik\rangle} + 2\Lambda_{j\langle i}\hat{p}_{k\rangle j} + 2\hat{p}_{j\langle ik\rangle}\lambda_j + \hat{p}_{jj\langle k}\lambda_{i\rangle}. \tag{5.7}$$

A parte linear do traço de $(3.3)_4$ reduz-se a

$$\varrho_\kappa + (c_\theta - 2)\beta = \frac{1}{\theta}(3b_3 - c_\theta b_1). \tag{5.8}$$

Em (4.6) foi definido o tensor $\hat{S}_{ij}$, mais conhecido como *tensor viscoso*. A partir deste tensor, é definida a *pressão dinâmica* $p_d = -\frac{1}{3}\hat{S}_{kk}$. É evidente que a pressão dinâmica herda do tensor viscoso a propriedade de se anular no equilíbrio. Por

$$\hat{p}_{ij} = (\beta + p_d)\delta_{ij} - \hat{S}_{\langle ij\rangle}, \tag{5.9}$$

e as relações $(5.4)_3$, $(5.1)_{2,3}$, $(5.2)_1$ tem-se que

$$p_d = (3b_3 - c_\theta b_1)2h_3\varrho_\varepsilon + o(2), \quad \hat{S}_{\langle ij\rangle} = -\frac{\theta}{2h_2}(\varrho_\kappa - 2\beta)\varrho_{\langle ij\rangle} + o(2). \tag{5.10}$$

Há ainda, mais uma equação a ser obtida usando as representações (4.10) de η e $\check{\Phi}_k$, somente até segunda ordem. A saber, a equação c escrita mediante termos de segunda ordem que, pela independência linear dos tensores $\varrho_{\langle ki\rangle}$ e δ_{ki}, implica

$$\begin{gathered}\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial F_{i\beta}} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial b_2}{\partial F_{i\beta}}\right) - 4\frac{\partial\beta}{\partial F_{i\beta}} = 0,\\ \frac{5}{3}\frac{\partial\beta}{\partial F_{i\beta}} + 2c_\theta h_3\left(\frac{\partial a_1}{\partial F_{i\beta}} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial b_1}{\partial F_{i\beta}}\right) - 6h_3\left(\frac{\partial a_3}{\partial F_{i\beta}} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial b_3}{\partial F_{i\beta}}\right) = 0.\end{gathered} \tag{5.11}$$

Em resumo, as equações constitutivas para os fluxos são

$$\begin{aligned}\hat{q}_k &= \frac{A_1}{2h_1}\varrho_{iik} + o(2),\\ \hat{p}_{ik} &= (\beta + p_d)\delta_{ik} - \hat{S}_{\langle ik\rangle},\\ \hat{p}_{ijk} &= \frac{A_2}{2h_1}\varrho_{nn\langle i}\delta_{j\rangle k} + \frac{A_3}{2h_1}\varrho_{nnk}\delta_{ij} + o(2),\\ \hat{p}_{iijk} &= \alpha\delta_{kj} + (3a_3 - c_\theta a_1)2h_3\varrho_\varepsilon\delta_{kj} + \frac{a_2}{2h_2}\varrho_{\langle kj\rangle} + o(2),\end{aligned} \tag{5.12}$$

com

$$
\begin{aligned}
A_i &= a_i - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E b_i, & A_1 &= -\theta^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\right),\\
0 &= \frac{\partial\alpha}{\partial F_{i\beta}} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial\beta}{\partial F_{i\beta}}, & p_d &= (3b_3 - c_\theta b_1)2h_3\varrho_\varepsilon + o(2),\\
c_\theta &= \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\right)^{-1}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta}, & \hat{S}_{\langle ij\rangle} &= -\frac{\theta}{2h_2}(\varrho_\kappa - 2\beta)\varrho_{\langle ij\rangle} + o(2),\\
\beta &= \frac{1}{3}\hat{p}^o_{ss}, & b_2 &= (\varrho_\kappa - 2\beta)\,\theta.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

6. Produção de Entropia

Foi visto na Seção 4 que a produção de entropia s é mínima no estado de equilíbrio. Além da condição (4.1), para que s seja mínima no equilíbrio, é exigido também que

$$
\left.\frac{\partial^2 s}{\partial X_A \partial X_B}\right|_E \geq 0, \tag{6.1}
$$

onde X_A é da forma $(\Lambda^\varepsilon_{i\beta}, \Lambda_\varepsilon, \Lambda_{ij}, \lambda_j)$.

As funções π_{ij} e π_{iij} dependem de $(\lambda_{i\beta}, \Lambda, \Lambda_{ij}, \lambda_j)$ e conseqüentemente, dependem de $(\Lambda^\varepsilon_{i\beta}, \Lambda_\varepsilon, \Lambda_{ij}, \lambda_j)$. Portanto as representações lineares de π_{ij} e π_{iij} são dadas por

$$
\begin{aligned}
\pi_{ij} &= r_1\Lambda_{ij} + r_2\Lambda^\varepsilon_{ij} + r_3\Lambda_\varepsilon\delta_{ij} + o(2),\\
\pi_{iij} &= \tau\lambda_j + o(2),
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

onde r_1, r_2, r_3 e τ são funções de (F_{ij}, θ). Então a expressão $(3.3)_5$ para a produção de entropia torna-se

$$
s = \varrho_\kappa\left(r_1\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} + r_2\Lambda^\varepsilon_{ij}\Lambda_{ij} + r_3\Lambda_\varepsilon\Lambda_{ii} + \tau\lambda_j\lambda_j\right) + o(3). \tag{6.3}
$$

A inequação (6.1) é agora rescrita como

$$
w\cdot\left.\frac{\partial^2 s}{\partial X_A \partial X_B}\right|_E w = 2r_2\Lambda_{ij}\Lambda^\varepsilon_{ij} + 2r_3\Lambda_{ii}\Lambda_\varepsilon + 2r_1\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} + 2\tau\lambda_p\lambda_p \geq 0,
$$

para todo vetor $w = (\Lambda^\varepsilon_{ij}, \Lambda_\varepsilon, \Lambda_{ij}, \lambda_p)$. Particularizamos os vetores w e obtivemos restrições sobre os coeficientes r_1, r_2, r_3 e τ. De fato, fizemos somente Λ_{12} não nulo e obtivemos $r_1 \geq 0$. Fizemos somente λ_1 não nulo e obtivemos $\tau \geq 0$ e por último, tomamos w cujas coordenadas $\lambda_p = 0$ para $p = 1, 2, 3$, $\Lambda_{kl} = 0$ para $k \neq l$, e concluímos que

$$
2r_2\Lambda_{jj}\Lambda^\varepsilon_{ii} + 2r_3\Lambda_{ii}\Lambda_\varepsilon \geq 0,
$$

para todo Λ_{jj}, Λ^ε_{ii} e Λ_ε. Fizemos $\Lambda_\varepsilon = 0$ e obtivemos $r_2 = 0$ e por conseguinte que $r_3 = 0$.

Da invertibilidade de π_{ij} na variável Λ_{ij}, e de π_{iij} na variável λ_j, tem-se

$$
r_1 > 0 \quad \text{e} \quad \tau > 0. \tag{6.4}
$$

7. Concavidade da Densidade de Entropia

Uma condição suficiente para que o sistema (2.1) e (2.2) seja hiperbólico é $h(\boldsymbol{u})$ ser uma função côncava [10]. Isto ocorrerá se, e somente se

$$\delta\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\cdot\delta\boldsymbol{U}<0 \qquad \text{para todas as variações} \qquad \delta\hat{\boldsymbol{\Lambda}},\delta\boldsymbol{U},$$

onde $\delta\hat{\boldsymbol{\Lambda}}=(\delta(\varrho_\kappa\hat{\lambda}_{s\alpha}),\delta\hat{\Lambda}_i,\delta\hat{\Lambda},\delta\hat{\Lambda}_{ij},\delta\hat{\lambda}_j)$ e $\delta\boldsymbol{U}=(\delta F_{s\alpha},\delta(\varrho v_i),\delta(\varrho e),\delta u_{ij},\delta u_{iij})$.

Por se tratar de uma forma quadrática, e supondo $\dot{\varrho}_\kappa=0$ e $\det F>0$, a expressão $\delta\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\cdot\delta\boldsymbol{u}$ é posta na forma $\boldsymbol{w}\cdot A\boldsymbol{w}$ onde $\boldsymbol{w}=(\delta F_{ij},\delta\theta,\delta\varrho_\varepsilon,\delta v_k,\delta\varrho_{\langle kl\rangle},\delta\varrho_{ssk})$ e A é uma matriz negativa definida composta de blocos e coeficientes $C_{ijrs},C_{v_iv_k},C_{\theta\theta}$.

Da relação de Gibbs (4.3), tira-se

$$\frac{\partial\eta_0}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} \qquad \text{e} \qquad \theta\frac{\partial\eta_0}{\partial F_{ij}}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{ij}}+\frac{1}{\varrho_\kappa}\hat{p}^o_{ij}. \tag{7.1}$$

Pela expressão de c_θ, tem-se que

$$c_\theta\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}=\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta}. \tag{7.2}$$

É sabido que uma matriz negativa definida possui os coeficientes da diagonal negativos. Portanto,

$$C_{ijrs}<0 \ \text{ para } \ i=j=r=s, \ \ C_{\theta\theta}<0, \ \ C_{v_iv_k}<0 \ \text{ para } \ i=k, \ \text{ e } \ h_1<0. \tag{7.3}$$

Em particular,

$$\frac{\partial\hat{p}^0_{ij}}{\partial F_{rs}}=\theta C_{ijrs}|_E<0 \ \text{ para } \ i=j=r=s \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}=-\frac{\theta^2}{\varrho}C_{\theta\theta}|_E>0. \tag{7.4}$$

A relação $(7.4)_2$ juntamente com a $(7.1)_1$ implicam que

$$\frac{\partial\eta_0}{\partial\theta}>0, \tag{7.5}$$

além de mostrar que o calor específico $c_v=\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}$ a volume constante, é positivo.

8. Conclusão

Esse trabalho, feito para materiais viscoelásticos, é uma ampliação do trabalho feito em [13] feito para fluidos. Pelo fato do esperado ter ocorrido, ou seja, obter os resultados (5.12), (6.4) e (7.5) com similaridade aos obtidos em [13], ficamos satisfeitos com os resultados. Aqui, a originalidade é, no mínimo, a mesma que em [13], ou seja, com um menor número de variáveis, foram obtidos os resultados em (5.12), (5.13). Uma extensão direta desse trabalho seria usar os termos de ordem 3 para a densidade e fluxos de entropia em (4.10) e uma outra extensão seria encontrar um sistema de equações diferenciais parciais quase-linear para um sólido com condução de calor.

9. Apêndice

A matriz A da seção 7 é igual a

$$
\begin{bmatrix}
[C_{ijrs}]_{9\times 9} & [C_{ij\theta}]_{9\times 1} & [C_{ij\varrho_\varepsilon}]_{9\times 1} & [C_{ijv_k}]_{9\times 3} & [D_{ijrs}]_{9\times 9} & [D_{ijk}]_{9\times 3} \\
[C_{ij\theta}]^T_{1\times 9} & [C_{\theta\theta}]_{1\times 1} & [C_{\theta\varrho_\varepsilon}]_{1\times 1} & [C_{\theta v_k}]_{1\times 3} & [C_{\theta kl}]_{1\times 9} & [C_{\theta k}]_{1\times 3} \\
[C_{ij\varrho_\varepsilon}]^T_{1\times 9} & [C_{\theta\varrho_\varepsilon}]^T_{1\times 1} & 0 & [-\varrho\frac{2\varrho_{llk}}{3h_1}]_{1\times 3} & [0]_{1\times 9} & [0]_{1\times 3} \\
[C_{ijv_k}]^T_{3\times 9} & [C_{\theta v_i}]^T_{3\times 1} & [-\varrho\frac{2\varrho_{llk}}{3h_1}]^T_{3\times 1} & [C_{v_iv_k}]_{3\times 3} & [-\varrho\frac{\varrho_{nnl}}{2h_1}\delta_{ik}]_{3\times 9} & [\varrho\frac{v_iv_k}{2h_1}]_{3\times 3} \\
[D_{ijrs}]^T_{9\times 9} & [C_{\theta kl}]^T_{9\times 1} & [0]_{9\times 1} & [-\varrho\frac{\varrho_{nnl}}{2h_1}\delta_{ik}]^T_{9\times 3} & [0]_{9\times 9} & [\frac{\varrho v_k}{2h_1}\delta_{il}]_{9\times 3} \\
[D_{ijk}]^T_{3\times 9} & [C_{\theta k}]^T_{3\times 1} & [0]_{3\times 1} & [\varrho\frac{v_iv_k}{2h_1}]_{3\times 3} & [\frac{\varrho v_k}{2h_1}\delta_{il}]^T_{3\times 9} & \frac{\varrho}{2h_1}Id_{3\times 3}
\end{bmatrix},
$$

onde os seus coeficientes desconhecidos são apresentados abaixo:

$$
\begin{aligned}
C_{ijrs} = \quad & \frac{1}{\theta}\frac{\partial \hat{p}^0_{ij}}{\partial F_{rs}} + \varrho_\kappa\left(2\frac{\partial h_3}{\partial F_{rs}}\varrho_\varepsilon\delta_{ij} - \frac{1}{2h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial F_{rs}}\varrho_{\langle ij\rangle}\right) - 2\frac{\varepsilon\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{sr}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial F_{ij}}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial F_{ij}}c_\theta\right) \\
& -2\varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{rs}}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial F_{ij}}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial F_{ij}}c_\theta\right) - \frac{\varrho}{3h_1^2}v_k\varrho_{llk}\frac{\partial h_1}{\partial F_{rs}}\frac{\partial \varrho_{nn}|_E}{\partial F_{ij}} \\
& +v_l\left\{-\frac{v_kv_k}{h_1^2}\varrho_{nnl}\frac{\partial h_1}{\partial F_{rs}} - v_k\left(2\varrho_\varepsilon\frac{\partial h_3}{\partial F_{rs}} - \frac{\varrho_{\langle kl\rangle}}{2h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial F_{rs}}\right) + v_l\varrho_\varepsilon\left(h_3\frac{\partial c_\theta}{\partial F_{rs}} + c_\theta\frac{\partial h_3}{\partial F_{rs}}\right)\right. \\
& \left. -\frac{1}{3h_1}\varrho_{kkl}\frac{\partial\varrho_{nn}|_E}{\partial F_{rs}}\right\}\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{ij\theta} = \quad & -\frac{\varepsilon\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial\theta}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial\theta}c_\theta\right) + \frac{1}{2\theta^2}\left[\theta\frac{\partial\hat{p}^0_{ij}}{\partial\theta} - \hat{p}^0_{ij} - \varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{ij}} - \frac{\varepsilon\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji}\right] \\
& +\varrho_\kappa\left(\frac{\partial h_3}{\partial\theta}\varrho_\varepsilon\delta_{ij} - \frac{1}{4h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial\theta}\varrho_{\langle ij\rangle}\right) - \varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial F_{ij}}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial F_{ij}}c_\theta\right) \\
& -\varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{ij}}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial\theta}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial\theta}c_\theta\right) - \frac{\varrho}{3h_1^2}v_k\varrho_{llk}\frac{\partial h_1}{\partial F_{ij}}\frac{\partial\varrho_{nn}|_E}{\partial\theta} \\
& +\frac{v_l}{2}\left\{-\frac{v_kv_k}{h_1^2}\varrho_{nnl}\frac{\partial h_1}{\partial\theta} - 2\varrho_\varepsilon\frac{\partial h_3}{\partial\theta}v_l + \frac{v_k}{2h_2^2}\varrho_{\langle kl\rangle}\frac{\partial h_2}{\partial\theta} + v_l\varrho_\varepsilon\left(h_3\frac{\partial c_\theta}{\partial\theta} + c_\theta\frac{\partial h_3}{\partial\theta}\right) + \frac{v_l}{\theta^2}\right. \\
& \left. -\frac{1}{3h_1}\varrho_{kkl}\frac{\partial\varrho_{nn}|_E}{\partial\theta}\right\}\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji},
\end{aligned}
$$

$$
C_{ij\varrho_\varepsilon} = \quad \varrho_\kappa h_3\delta_{ij} - \varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{ij}}c_\theta h_3 - \left(\varepsilon c_\theta h_3 + 2v_sv_sh_3 + 2c_\theta h_3 + \frac{v_l}{6h_1}\varrho_{kkl}\right)\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji},
$$

$$
\begin{aligned}
C_{ijv_k} &= \frac{1}{2}\left[v_k\left(2c_\theta\varrho_\varepsilon h_3 - \frac{1}{\theta}\right) - \frac{v_l}{h_2}\varrho_{\langle kl\rangle} - 4h_3 v_k\varrho_\varepsilon + \frac{v_l v_l}{2h_1}\varrho_{nnk} + \frac{v_k v_l}{h_1}\varrho_{nnl}\right. \\
&\quad \left. -\frac{5}{6}\frac{\varrho_{nn}|_E}{h_1}\varrho_{llk}\right]\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji} - \varrho\frac{v_k v_l}{2h_1^2}\varrho_{nnl}\frac{\partial h_1}{\partial F_{ij}} - \frac{4}{6}\frac{\varrho}{h_1}\varrho_{llk}\frac{\partial \varrho_{ss}|_E}{\partial F_{ij}}, \\
D_{ijrs} &= \frac{\varrho_\kappa}{4h_2}\delta_{ri}\delta_{sj} - \frac{1}{2}\left(v_r v_s\frac{1}{2h_2} + \frac{v_s}{h_1}\varrho_{llr}\right)\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji} - \frac{\varrho}{2h_1^2}v_r\varrho_{lls}\frac{\partial h_1}{\partial F_{ij}}, \\
D_{ijk} &= \left(\varrho_{llk} - 2v_l\varrho_{lk} - v_s\varrho_{ll} + 2v_l v_l v_k\right)\frac{1}{4h_1}\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji} + \frac{\varrho}{6h_1}v_k\frac{\partial\varrho_{nn}|_E}{\partial F_{ij}} - \frac{\varrho}{4h_1^2}\varrho_{llk}\frac{\partial h_1}{\partial F_{ij}}, \\
C_{\theta\theta} &= -\frac{\varrho}{\theta^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} - 2\varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial\theta}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial\theta}c_\theta\right) - \frac{\varrho}{3h_1^2}v_r\varrho_{llr}\frac{\partial h_1}{\partial\theta}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta}, \\
C_{\theta\varrho_\epsilon} &= -\varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}c_\theta h_3, \\
C_{\theta v_k} &= -\varrho\frac{v_k v_l}{2h_1^2}\varrho_{nnl}\frac{\partial h_1}{\partial\theta} - \frac{2}{3}\frac{\varrho}{h_1}\varrho_{nnk}\frac{\partial\varrho_{nn}|_E}{\partial\theta}, \\
C_{\theta kl} &= -\frac{\varrho}{2h_1^2}v_k\varrho_{nnl}\frac{\partial h_1}{\partial\theta}, \\
C_{\theta k} &= \frac{\varrho}{6h_1}v_k\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta} - \frac{\varrho}{4h_1^2}\varrho_{llk}\frac{\partial h_1}{\partial\theta}, \\
C_{v_i v_k} &= \left[\frac{\varrho}{\theta} + 2\varrho h_3\varrho_\varepsilon\left(c_\theta + 2\right)\right]\delta_{ik} + \frac{\varrho}{2h_2}\varrho_{\langle ik\rangle}.
\end{aligned}
$$

Referências

[1] G.M. Kremer, Extended thermodynamics of ideal gases with 14 fields, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **45** (1986), 419–440.

[2] G.M. Kremer, Extended thermodynamics of non-ideal gases, *Physica*, **144A** (1987), 156–178.

[3] G.M. Kremer, Extended thermodynamics of molecular ideal gases, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **1** (1989), 21–45.

[4] G.M. Kremer, C. Beevers, Extended thermodynamics of dense gases, *Lecture Note in Physics*, **199** (1984), 429–436.

[5] I-Shih Liu, Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **46** (1972), 131–148.

[6] I-Shih Liu, An extended field theory of viscoelastic materials, *Int. J. Engng Sci.*, **26** (1988), 331–342.

[7] I-Shih Liu, Extended thermodynamics of viscoelastic materials, *Continuum Mech. Thermodyn*, **1** (1989), 143–164.

[8] I-ShihLiu, Extended thermodynamics of viscoelasticity, *Proceedings of the* 5^{th} *Bilateral Polish-Italian Meeting, Thermodynamics and kinetic theory. World Scientific Publishing, Singapore*, (1990) 93–106 .

[9] I-Shih Liu, "Continuum Mechanics", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (2002).

[10] I-Shih Liu, G.M. Kremer, Hyperbolic system of field equations for viscous fluids, *Mat. Aplic. Comp.*, **9** (1990), 123–135.

[11] I-Shih Liu, I. Müller, Extended thermodynamics of classical and degenerate gases, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **83** (1983), 285–332.

[12] I. Müller, T. Ruggeri, "Rational Extended Thermodynamics", Second Edition, Springer-Verlag, New York (1998).

[13] A. Vignatti, I-Shih Liu, Termodinâmica estendida de fluidos viscosos com condução de calor, *TEMA, SBMAC*, numero **2** (2006), 381–390.

[14] R. Resnick, D. Halliday, "Física", v2 4^a ed., Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (1984).

[15] T. Ruggeri, Galilean invariance and entropy principle for systems of balance laws, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **1** (1989), 3–20.