

Um Novo Algoritmo para a Discriminação de Estados Quânticos

T. EVANGELISTA¹, Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Ciências Tecnológicas e Exatas - ICTE, Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM, 38025-180, Uberaba, MG, Brasil.

C. LAVOR², Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, 13083-859, Campinas, SP, Brasil.

Resumo. A melhor estratégia para a discriminação de estados quânticos não-ortogonais está relacionada com o melhor conjunto de medidas POVM. Apresentamos um novo algoritmo para o problema, estendendo o espaço de Hilbert associado e usando a programação semidefinida e a resolução de sistemas não-lineares.

Palavras-chave. discriminação quântica, programação semidefinida, espaço de Hilbert estendido.

1. Introdução

Um dos problemas importantes relacionados à teoria da informação quântica está vinculado à discriminação de estados quânticos puros não-ortogonais. Esta indistinguibilidade de estados quânticos não-ortogonais está no cerne da computação quântica e da informação quântica [1, 3].

Eldar [2] mostrou que a melhor medição para N estados não-ortogonais pode ser formulada como um problema de programação semidefinida [12]. Baseando-se nesta formulação, Rabelo et al. [8] propuseram um algoritmo, chamado de Algoritmo Ótimo Discriminador (AOD), que implementa tal formulação.

O objetivo deste trabalho é propor um novo algoritmo baseado no AOD, com o intuito de simplificar os cálculos e melhorar os resultados computacionais. O algoritmo foi implementado em MatLab e aplicado com sucesso em problemas com dimensões maiores que os da literatura.

Este trabalho é organizado como segue: na Seção 2, apresentamos o problema da discriminação de estados quânticos sem ambiguidade usando o formalismo POVM; na Seção 3, descrevemos a construção do novo algoritmo para a distinção de estados quânticos não-ortogonais; na Seção 4, exibimos os resultados. Na Seção 5, finalizamos com as conclusões.

¹tatilista@icte.uftm.edu.br

²clavor@ime.unicamp.br

2. O Problema

O postulado geral de medidas da Mecânica Quântica [6] fornece uma regra que descreve a estatística de medidas e diz qual o estado do sistema após a medição. Contudo, em algumas aplicações, a probabilidade dos diferentes resultados (ou a estatística das medidas) é fundamental para a grande maioria dos processos em computação e informação quântica. Para tais casos, existe uma ferramenta matemática conhecida como formalismo POVM [6], que é especialmente bem adaptado para a análise de medidas. Para isso, definimos operadores de detecção Π_i conhecidos como elementos de POVM³.

Definição 2.1. ([6]) *Os operadores de detecção Π_i são chamados elementos de POVM se satisfazem as seguintes condições:*

- *Os operadores de detecção satisfazem a condição de completitude, ou seja,*

$$\sum_i \Pi_i = I.$$
- *A probabilidade de se obter o resultado rotulado pelo índice i é dada por $p(i|\rho) = \text{tr}(\Pi_i \rho)$, onde ρ é o operador densidade do sistema.*
- *Todos os operadores de detecção são hermitianos e positivos semidefinidos, isto é, $\Pi_i = \Pi_i^\dagger$ e $\Pi_i \geq 0$, para todo i .*

Usando o formalismo de medidas POVM, Ivanovic [5] definiu uma estratégia para o problema que consiste em distinguir dois estados quânticos puros não-ortogonais linearmente independentes sem ambiguidade, admitindo alguns resultados inconclusivos, chamada de estratégia UD⁴, descrita a seguir, para o caso com N estados quânticos.

Consideremos que o sistema quântico é dado pelo ensemble $\{\mu_i, |Q_i\rangle\}$, onde μ_i são as probabilidades a priori associadas aos estados quânticos $|Q_i\rangle$ para $i = 1, \dots, N$, tal que $\sum_{i=1}^N \mu_i = 1$, em um espaço de Hilbert de dimensão N . Para detectar os estados do sistema, a medição é construída formando $N + 1$ operadores de detecção $\{\Pi_i, 0 \leq i \leq N\}$ satisfazendo

$$\sum_{i=0}^N \Pi_i = I. \quad (2.1)$$

Estes operadores são construídos para que os estados sejam medidos corretamente ou a medição declara um resultado inconclusivo. Então, cada operador Π_i corresponde à detecção correta dos estados $|Q_i\rangle$, para $i = 1, \dots, N$, e $\Pi_0 = I - \sum_{i=1}^N \Pi_i$ corresponde a um resultado inconclusivo. Os operadores de detecção devem obedecer:

$$\langle Q_i | \Pi_j | Q_i \rangle = p_i \delta_{ij},$$

³Na literatura inglesa este formalismo é chamado de “positive operator-valued measure”.

⁴Na literatura inglesa esta estratégia é chamada de “unambiguous discrimination”.

para $i, j = 1, \dots, N$, $0 \leq p_i \leq 1$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Portanto, temos um problema de otimização, isto é, maximizar as probabilidades de detecção p_i conclusivas, segundo o vínculo (2.1).

Eldar [2] mostrou que a estratégia UD pode ser formulada como um problema de programação semidefinida [12], onde os operadores de detecção são expressos da seguinte forma:

$$\Pi_i = p_i \mathcal{C}_i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

onde $\mathcal{C}_i = |\tilde{Q}_i\rangle\langle\tilde{Q}_i|$ e os vetores $|\tilde{Q}_i\rangle$ não são normalizados e estão em um espaço de Hilbert de dimensão N . Além disso, representam os estados recíprocos associados aos estados $|Q_i\rangle$, para $i = 1, \dots, N$, ou seja, $\langle\tilde{Q}_i|Q_j\rangle = \delta_{ij}$, para $1 \leq i, j \leq N$.

Se os estados $|Q_i\rangle$ são preparados com probabilidades a priori μ_i , tais que $\sum_i \mu_i = 1$, então a probabilidade total de detecção correta do estado é

$$P_D = \sum_{i=1}^N \mu_i \langle Q_i | \Pi_i | Q_i \rangle = \sum_{i=1}^N \mu_i p_i = \langle \mu | p \rangle.$$

Portanto, o problema consiste em resolver o seguinte problema de programação semidefinida (PSD) [12] para encontrar os valores $p_i \geq 0$ de modo a minimizar P_D , sujeito à condição da Equação (2.1), que pode ser expresso como

$$\begin{aligned} & \min_{p \in R^N} \langle \mu | p \rangle \\ \text{s.a. } & \begin{cases} I - \sum_{i=1}^N p_i \mathcal{C}_i \geq 0 \\ p_i \geq 0 \end{cases} \quad (1 \leq i \leq N), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $|\mu\rangle$ é um vetor com componentes $-\mu_i$, sendo μ_i a probabilidade a priori de cada estado $|Q_i\rangle$ e $\mathcal{C}_i = |\tilde{Q}_i\rangle\langle\tilde{Q}_i| \in R^{N \times N}$.

O problema de PSD (2.2) pode ser resolvido usando o pacote CSDP [4]. O algoritmo associado a este pacote é uma versão do algoritmo preditor corretor do método primal-dual de Helmberg et al. [4]. Foi escrito na linguagem em C, porém pode ser usado pelo Matlab através da ferramenta yalmip [4].

3. O Novo Algoritmo

Em [8], Rabelo et al. propõem um procedimento computacional chamado de Algoritmo Ótimo Discriminador (AOD), que implementa as medidas POVM para a estratégia da distinção de N estados puros não-ortogonais, usando a programação semidefinida e a minimização da norma. Baseado nas idéias do AOD, construímos um novo algoritmo, denominado Algoritmo Discriminador Quântico (ADQ) [11].

A principal diferença entre o AOD e o ADQ é que usamos apenas conceitos de álgebra linear, substituindo o cálculo de raízes de um polinômio de grau 8. Além disso, desenvolvemos o algoritmo somente com uma condição para os estados de entrada (conservação do produto escalar), pois a condição de normalização imposta

no AOD tornou-se redundante, uma vez que os estados de entrada satisfazem a condição de normalização [11].

A seguir, apresentamos passo a passo da construção do ADQ, que consiste em estender o espaço de Hilbert inicial de N para $2N - 1$ dimensões, transformando os estados quânticos não-ortogonais de entrada em uma configuração final discriminável, usando o problema de PSD e a resolução de sistemas não-lineares.

Isso significará que estaremos prontos para fazer a distinção do estado final, pois teremos uma discriminação perfeita ou falha no processo para os estados quânticos não-ortogonais analisados, uma vez que os estados nesta configuração final discriminável serão escritos com componentes únicas na base ortonormal e as demais componentes na base estendida.

O primeiro passo do ADQ é reescrever os N estados de entrada não-ortogonais $|Q_i\rangle$, em uma forma escada, numa base ortonormal $\{|i\rangle\}$, para $i = 1, \dots, N$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
 |Q_1^{esc}\rangle &= |1\rangle, \\
 |Q_2^{esc}\rangle &= c_{21}|1\rangle + c_{22}|2\rangle, \\
 |Q_3^{esc}\rangle &= c_{31}|1\rangle + c_{32}|2\rangle + c_{33}|3\rangle, \\
 |Q_4^{esc}\rangle &= c_{41}|1\rangle + c_{42}|2\rangle + c_{43}|3\rangle + c_{44}|4\rangle, \\
 &\vdots \\
 |Q_N^{esc}\rangle &= c_{N1}|1\rangle + c_{N2}|2\rangle + c_{N3}|3\rangle + \dots + c_{NN}|N\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\{|Q_i^{esc}\rangle\}$ pertencem ao espaço de Hilbert inicial de dimensão N e os coeficientes c_{ij} são obtidos usando a conservação do produto escalar sobre os estados de entrada, isto é, $\langle Q_i^{esc} | Q_j^{esc} \rangle = \langle Q_i | Q_j \rangle$, para todo $i, j = 1, \dots, N$.

Em seguida, nosso objetivo é obter uma nova configuração, a configuração final discriminável, através da nova estrutura dos estados de entrada não-ortogonais “na forma escada” de acordo com a Equação (3.1), fazendo com que as componentes de mesmos índices sejam fixas com a base ortonormal, ou seja, $\{|1\rangle, \dots, |N\rangle\}$.

Este passo finalizará o procedimento do ADQ, ou seja, estaremos aptos para realizar a distinção dos N estados quânticos não-ortogonais. Para isto, utilizamos o problema dado em [10] para a construção desta configuração, que aplicando o Teorema de Neumark [7], podemos estender o espaço de Hilbert inicial de dimensão N para $2N - 1$. Desta forma, a configuração final discriminável dos N estados quânticos não-ortogonais é dada por:

$$\begin{aligned}
 |Q_{f1}\rangle &= g_{11}|1\rangle + g_{1,N+1}|N+1\rangle + \dots + g_{1,2N-2}|2N-2\rangle + g_{1,2N-1}|2N-1\rangle \\
 |Q_{f2}\rangle &= g_{22}|2\rangle + g_{2,N+1}|N+1\rangle + \dots + g_{2,2N-2}|2N-2\rangle + g_{2,2N-1}|2N-1\rangle \\
 |Q_{f3}\rangle &= g_{33}|3\rangle + g_{3,N+1}|N+1\rangle + \dots + g_{3,2N-2}|2N-2\rangle \\
 &\vdots \\
 |Q_{fi}\rangle &= g_{ii}|i\rangle + g_{i,N+1}|N+1\rangle + \dots + g_{i,2N+1-i}|2N+1-i\rangle \\
 &\vdots \\
 |Q_{fN}\rangle &= g_{NN}|N\rangle + g_{N,N+1}|N+1\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

para $i = 3, \dots, N$, onde $g_{ii} = \sqrt{p_i}$, para $i = 1, \dots, N$ (p_i são soluções do problema de PSD (2.2)) e os outros coeficientes g_{ij} , para $i = 1, \dots, N$ e $j = N + 1, \dots, 2N - 1$ são obtidos resolvendo o seguinte sistema não-linear

$$\begin{cases} BB^t = S^t S + ss^t - \tilde{D}\tilde{D}^t \\ Bb = s \\ g_{11}^2 + b^t b = 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde

$$S = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{32} & \dots & c_{N2} \\ 0 & c_{33} & \dots & c_{N3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{NN} \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{N1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} g_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{NN} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} g_{1,N+1} \\ g_{1,N+2} \\ \vdots \\ g_{1,2N-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{e } B^t = \begin{pmatrix} g_{2,N+1} & g_{3,N+1} & \dots & g_{N-1,N+1} & g_{N,N+1} \\ g_{2,N+2} & g_{3,N+2} & \dots & g_{N-1,N+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ g_{2,2N-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que nesta nova configuração (3.2), os estados possuem somente uma única componente na base ortonormal (espaço de Hilbert original), onde os seus índices são fixos com os da base associada, e as demais componentes da base estendida (espaço de Hilbert estendido), ou seja, $\{|N + 1\rangle, \dots, |2N - 1\rangle\}$.

Desta forma, se a medida colapsa na base ortonormal $\{|1\rangle, \dots, |N\rangle\}$ do espaço de Hilbert original, distinguimos o estado perfeitamente, devido a unicidade da representação dos estados nesta componente. Caso contrário, se a medida colapsa para a base extra $\{|N + 1\rangle, \dots, |2N - 1\rangle\}$ do espaço de Hilbert estendido, não sabemos qual foi o estado detectado, pois os estados de interesse possuem uma (ou várias simultaneamente) das componentes da base estendida, $|N + 1\rangle, |N + 2\rangle, \dots, |2N - 1\rangle$. A figura abaixo ilustra este procedimento:

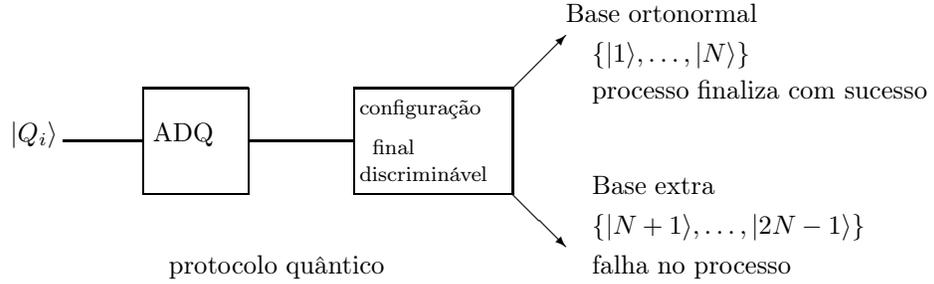


Figura 1 : Processo de medição para N estados quânticos não-ortogonais via ADQ.

4. Resultados Computacionais

Inicialmente, consideramos um exemplo detalhado, de dimensão $N = 3$, para a aplicação do ADQ. Considere o seguinte ensemble, $\{(|Q_1\rangle, 0, 6); (|Q_2\rangle, 0, 2); (|Q_3\rangle, 0, 2)\}$, onde

$$\begin{cases} |Q_1\rangle = |1\rangle, \\ |Q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|3\rangle, \\ |Q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|3\rangle. \end{cases} \quad (4.1)$$

Aplicando o ADQ, obtemos os seguintes passos:

- A primeira etapa consiste em reescrever os $N = 3$ estados quânticos de entrada em uma forma escada com base ortonormal $\{|i\rangle, i = 1, 2, 3\}$:

$$\begin{cases} |Q_1^{lad}\rangle = |1\rangle \\ |Q_2^{lad}\rangle = 0,58|1\rangle + 0,82|2\rangle \\ |Q_3^{lad}\rangle = 0,58|1\rangle + 0,82|3\rangle. \end{cases}$$

- Resolvendo o problema de PSD (2.2) através do pacote CSDP, obtemos:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0,33 \\ 0,33 \end{pmatrix}.$$

- Resolvendo o sistema não-linear (3.3) obtemos os coeficientes g_{ij} , para $i = 1, 2, 3, j = 4, 5$, e os outros coeficientes $g_{ii} = \sqrt{p_i}$, são obtidos resolvendo o problema de PSD, para $i = 1, 2, 3$.

Assim, obtemos a configuração final discriminável:

$$\begin{cases} |Q_{f1}\rangle = 0,58|1\rangle + 0,71|4\rangle + 0,41|5\rangle, \\ |Q_{f2}\rangle = 0,58|2\rangle + 0,41|4\rangle + 0,71|5\rangle, \\ |Q_{f3}\rangle = 0,58|3\rangle + 0,82|4\rangle. \end{cases}$$

A Tabela 1 fornece o tempo médio para cada $N = 2, 3, \dots, 10, 20, \dots, 100$. Para cada dimensão fornecida, aplicamos o algoritmo em dez problemas com ensembles aleatórios, ou seja, foram fornecidos aleatoriamente estados de entrada não-ortogonais associados a probabilidades também aleatórias.

Tabela 1: Tempo médio para cada $N = 2, 3, \dots, 10, 20, 30, \dots, 100$.

N	tempo médio
2	1.4344s
3	1.7156s
4	1.7706s
5	2.1174s
6	2.0282s
7	2.2936s
8	2.9421s
9	2.4860s
10	2.0514s
20	2.6954s
30	4.3342s
40	6.1859s
50	9.0860s
60	14.8456s
70	20.8436s
80	32.8407s
90	44.4249s
100	1min 11.025s

Os resultados da Tabela 1 indicam que o ADQ pode resolver, de forma eficiente, problemas com pequenas e grandes dimensões. Não pudemos fazer comparações com o AOD, pois não existem dados disponíveis.

5. Conclusões

Abordamos um problema fundamental na área de informação e computação quântica: a discriminação de estados quânticos não-ortogonais.

Propusemos um novo algoritmo, o ADQ, baseado no algoritmo AOD, descrito em [8]. Estendendo o espaço de Hilbert de N para $2N - 1$ dimensões e com o auxílio do problema de PSD e da resolução de um sistema não-linear, transformamos os estados quânticos de entrada não-ortogonais em uma configuração final discriminável. Essa configuração garante que os estados podem ser distinguidos sem ambiguidade, pois estes estados possuem somente uma única componente na base ortonormal (espaço de Hilbert original), onde os seus índices são fixos com os da base associada, e as demais componentes da base estendida (espaço de Hilbert estendido), ou seja, $\{|N + 1\rangle, \dots, |2N - 1\rangle\}$.

A principal diferença entre o AOD e ADQ é que usamos apenas conceitos de

álgebra linear, substituindo o cálculo de raízes de um polinômio de grau 8 (efetuado no AOD). O algoritmo ADQ foi implementado em MatLab e aplicado com sucesso em problemas com dimensões maiores que aqueles apresentados na literatura.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer o apoio financeiro da FAPESP e do CNPq, bem como aos revisores anônimos, pelos comentários e sugestões de melhoria deste artigo. Agradecemos também ao Prof. Wilson R. M. Rabelo, pelas valiosas discussões sobre o tema deste trabalho.

Abstract. The best strategy for discrimination of non-orthogonal quantum states is related to the best set of POVM. We present a new algorithm to this problem, extending the associated Hilbert space and using semidefinite programming and nonlinear systems.

Referências

- [1] T.M. Cover, J.A. Thomas, “Elements of Information Theory”, Wiley, 1991.
- [2] Y.C. Eldar, A semidefinite programming approach to optimal unambiguous discrimination of quantum states, *IEEE Transactions on Information Theory*, **49** (2003), 446–456.
- [3] L.K. Grover, Quantum mechanics help in searching for a needle in a haystack, *Physical Review Letters*, **79** (1997), 325–328.
- [4] C. Helmberg, F. Rendl, R.J. Vanderbei, H. Wolkowicz, An interior point method for semidefinite programming, *SIAM Journal on Optimization*, **6** (1996), 342–361.
- [5] I.D. Ivanovic, How to differentiate between non-orthogonal states, *Physics Letters A*, **123** (1987), 257–259.
- [6] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information”, Cambridge University Press, 2000.
- [7] A. Peres, “Quantum Theory: Concepts and Methods”, Kluwer, Boston, 1993.
- [8] W.R.M. Rabelo, “Algoritmos para a Informação Quântica: discriminação de estados quânticos e modelo híbrido”, Tese de Doutorado, UFMG, Belo Horizonte, MG, 2006.
- [9] W.R.M. Rabelo, A.G. Rodrigues, R.O. Vianna, An algorithm to perform POVMs through Neumark theorem: application to the discrimination of non-orthogonal pure quantum states, *International Journal of Modern Physical C*, **17** (2006), 1–16.
- [10] L. Roa, J.C. Retamal, C. Saavedra, Quantum-state discrimination, *Physical Review A*, **66** (2002), 1–4.

- [11] T.S. Evangelista, “Discriminação de Estados Quânticos via Programação Semidefinida”, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, SP, 2009.
- [12] H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenbergue, “Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms and Applications”, Kluwer, 2000.