

Identificação de Fontes para a Equação Unidimensional de Difusão-Advecção^{1,2}

D.M. DE SOUSA³, Departamento de Matemática, ICEx - PUVR, UFF - Universidade Federal Fluminense, 27213-145 Volta Redonda, RJ, Brasil.

N.C. ROBERTY⁴, Programa de Engenharia Nuclear, COPPE, UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo. Consideramos o problema inverso de identificação de fontes para a equação unidimensional de difusão-advecção com coeficientes constantes a partir de informações no bordo do domínio. É apresentada uma formulação variacional do problema tendo como espaço de funções testes as soluções da equação modificada de Helmholtz homogênea. Considerando o caso em que a fonte é uma função característica de um intervalo obtemos um sistema não-linear e o resolvemos pelo método de Newton. Duas simulações numéricas são apresentadas: a primeira para ilustrar a eficiência do método proposto e a outra para indicar sua aplicabilidade para obter aproximações para fontes de suporte compacto.

Palavras-chave. problemas inversos, identificação de fontes, difusão-advecção.

1. Introdução

Sejam $\Omega = (x_0, x_1)$ um intervalo aberto de \mathbb{R} e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ fixos tais que $\alpha, \gamma > 0$. Consideremos os seguintes problemas:

Problema 1.1 (Problema Direto). *Dadas a função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e os valores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, encontre $u'(x_0)$, $u'(x_1)$ tal que u satisfaça*

$$\begin{cases} -\gamma u'' + \beta u' + \alpha u = f, & \text{em } \Omega \\ u(x_0) = a_1, u(x_1) = a_2 \end{cases} .$$

Problema 1.2 (Problema Inverso). *Dados os valores $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, encontre $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -\gamma u'' + \beta u' + \alpha u = f, & \text{em } \Omega \\ u(x_0) = a_1, u(x_1) = a_2 \\ u'(x_0) = b_1, u'(x_1) = b_2 \end{cases} .$$

¹Uma versão preliminar deste trabalho foi apresentada no XXXIII CNMAC 2010 [1].

²Agradecemos ao CNPq pelo auxílio financeiro.

³denis@con.ufrj.br; doutorando do Programa de Engenharia Nuclear - COPPE - UFRJ.

⁴nilson@con.ufrj.br; orientador.

Nos Problemas 1.1 e 1.2, o coeficiente γ corresponde ao parâmetro de difusão do meio onde se encontra a concentração u e o coeficiente β representa o campo vetorial de transporte o qual u está submetida. Neste trabalho, estamos considerando estes coeficientes constantes. Um trabalho futuro sugerido é investigar o Problema 1.2 considerando γ e β funções reais e o termo difusivo dado por $-(\gamma u)'$.

O problema direto é bem posto para $f \in L^2(\Omega)$, pois resolver a equação diferencial do Problema 1.1 é um problema bem posto e calcular a derivada de u nos pontos x_0 e x_1 também. Já o problema inverso é mal posto quando não temos informações adicionais sobre f .

Por exemplo, definindo

$$u_1(x) = -x^4 + 2x^2 - 1, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \text{e} \quad u_2(x) = -x^6 + 3x^2 - 2, \quad \forall x \in [-1, 1],$$

e também

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -u_1''(x) + u_1'(x) + u_1(x) \\ &= -x^4 - 4x^3 + 14x^2 + 4x - 5, \quad \forall x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -u_2''(x) + u_2'(x) + u_2(x) \\ &= -x^6 - 6x^5 + 30x^4 + 3x^2 + 6x - 8, \quad \forall x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

temos que o problema inverso associado ao sistema

$$\begin{cases} -u'' + u' + u = f, & \text{em } (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \\ u'(-1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

tem f_1 e f_2 como solução (além de $f \equiv 0$).

A equação de difusão-advecção é freqüentemente empregada para modelar o fenômeno de poluição em águas.

Em conseqüência da má colocação dos problemas de identificação de fontes, em geral existem muitas variações deste tipo de problema, como por exemplo, identificação de descontinuidades ou do suporte da fonte, ou ainda, determinar uma fonte sabendo-se que ela pertence a uma determinada classe de funções.

Um trabalho pioneiro neste assunto é [2], onde foi demonstrado que o problema de reconstrução de fontes para a equação de Poisson tem solução única, quando sabemos que a fonte pertence a uma classe de funções semelhante a que consideramos neste trabalho. Em [3] foi investigado o Problema 1.2 para fontes pontuais em domínios bidimensionais. Em [8] existem vários exemplos e resultados sobre problemas inversos de identificação de fontes. Neste texto, vamos investigar, principalmente o Problema 1.2, no caso onde f é uma *função característica* de um intervalo, isto é, quando

$$f(x) = \chi_{[\xi_1, \xi_2]}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{se} \quad x \in [\xi_1, \xi_2] \\ 0 & , \quad \text{se} \quad x \notin [\xi_1, \xi_2] \end{cases}, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.1)$$

para algum par $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$ desconhecido. Este tipo de função é freqüentemente considerado em trabalhos sobre reconstrução de fontes, como em [4, 5, 6, 7].

2. Formulação Variacional

Nesta seção vamos apresentar um problema de identificação de fonte equivalente ao Problema 1.2 e, a partir deste, vamos obter uma forma variacional para o mesmo.

Consideremos os dados do Problema 1.2. Fazendo a mudança de variável

$$u(x) = e^{\frac{\beta}{2\gamma}x} w(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

e denotando

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\alpha\gamma + \beta^2}{4\gamma^2}}, \quad (2.1)$$

$$g(x) = \frac{1}{\gamma} f(x) e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x}, \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$c_1 = a_1 e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x_0}, \quad c_2 = a_2 e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x_1},$$

$$d_1 = b_1 e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x_0} - \frac{a_1\beta}{2\gamma} e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x_0} \quad \text{e} \quad d_2 = b_2 e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x_1} - \frac{a_2\beta}{2\gamma} e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x_1},$$

temos que o Problema 1.2 equivale a

Problema 2.1. *Dados c_1, c_2, d_1, d_2 como definidos anteriormente, encontre $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -w'' + \kappa^2 w = g & \text{em } \Omega \\ w(x_0) = c_1, w(x_1) = c_2 \\ w'(x_0) = d_1, w'(x_1) = d_2 \end{cases},$$

pois, obtendo g no Problema 2.1, podemos obter f por (2.2). Note que κ definido em (2.1) é um número real, pois $\alpha, \gamma > 0$.

Consideremos o espaço das funções testes definido por

$$V(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid -v'' + \kappa^2 v = 0 \text{ em } \Omega\}.$$

Multiplicando g por uma função de $V(\Omega)$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} gv = \int_{\Omega} (-w'' + \kappa^2 w)v = \int_{\Omega} \kappa^2 wv - w''v = \int_{\Omega} wv'' - w''v.$$

Usando a segunda identidade de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} wv'' - w''v &= wv' - vw' \Big|_{x_0}^{x_1} \\ &= c_2 v'(x_1) - d_2 v(x_1) - c_1 v'(x_0) + d_1 v(x_0). \end{aligned}$$

Assim, definindo

$$B(g, v) = \int_{\Omega} gv, \quad \forall v \in V(\Omega)$$

e

$$L(v) = c_2 v'(x_1) - d_2 v(x_1) - c_1 v'(x_0) + d_1 v(x_0), \quad \forall v \in V(\Omega),$$

temos que se g é solução do Problema 2.1 então g é solução de

Problema 2.2 (Formulação Variacional). *Dados B e L como definidos anteriormente, encontre g tal que*

$$B(g, v) = L(v), \quad \forall v \in V(\Omega). \quad (2.3)$$

Sabemos que, definindo $v_1(x) = e^{\kappa x}$ e $v_2(x) = e^{-\kappa x}$, $\forall x \in \Omega$, temos que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $V(\Omega)$. Como B e L são lineares com respeito ao espaço $V(\Omega)$, então resolver o Problema 2.2 é equivalente a resolver o mesmo problema trocando a equação variacional (2.3) pelo sistema

$$\begin{cases} B(g, v_1) = L(v_1) \\ B(g, v_2) = L(v_2) \end{cases}. \quad (2.4)$$

Observação 2.1. *Se f é uma combinação linear de duas funções $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ conhecidas, isto é, se existem $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2$, então podemos obter f pelo sistema (2.4) se, e somente se,*

$$\det \begin{pmatrix} B(g_1, v_1) & B(g_2, v_1) \\ B(g_1, v_2) & B(g_2, v_2) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (2.5)$$

onde g_i , para $i = 1, 2$, é definida por $g_i(x) = \frac{1}{\gamma} f_i(x) e^{-\frac{\beta}{2\gamma} x}$, $\forall x \in \Omega$.

Pois, pela linearidade de B em relação a g , encontrar g em (2.4) equivale a encontrar ξ_1 e ξ_2 no sistema linear

$$\begin{cases} \xi_1 B(g_1, v_1) + \xi_2 B(g_2, v_1) = L(v_1) \\ \xi_1 B(g_1, v_2) + \xi_2 B(g_2, v_2) = L(v_2) \end{cases},$$

e assim, a condição (2.5) é necessária e suficiente para que exista apenas um par ξ_1, ξ_2 que satisfaça este último sistema.

3. Fontes Características de um Intervalo

Como vimos anteriormente, o Problema 1.2 é mal posto quando procuramos f em espaços gerais. Apresentaremos nesta seção uma classe de funções mais interessante do que o caso apresentado na Observação 2.1 e que podem ser recuperadas no Problema 1.2.

Consideremos o Problema 1.2 sabendo-se que $f = \chi_{[\xi_1, \xi_2]}$ é uma função característica de um intervalo fechado $[\xi_1, \xi_2]$, como definido em (1.1), para algum par $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$ desconhecido. Nossa estratégia é explorar o sistema (2.4) para obtermos ξ_1 e ξ_2 , e assim, determinar f .

Por (2.2), temos

$$g(x) = \frac{1}{\gamma} \chi_{[\xi_1, \xi_2]}(x) e^{-\frac{\beta}{2\gamma} x}, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.1)$$

Note que,

$$B(g, v_1) = \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)x} dx = \frac{1}{\gamma \left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)} \left(e^{\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_2} - e^{\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_1} \right),$$

$$B(g, v_2) = \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{\left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)x} dx = \frac{1}{\gamma \left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)} \left(e^{\left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_2} - e^{\left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_1} \right),$$

$$\begin{aligned} L(v_1) &= c_2 \kappa e^{\kappa x_1} - d_2 e^{\kappa x_1} - c_1 \kappa e^{\kappa x_0} + d_1 e^{\kappa x_0} \\ &= (c_2 \kappa - d_2) e^{\kappa x_1} - (c_1 \kappa - d_1) e^{\kappa x_0} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L(v_2) &= -c_2 \kappa e^{-\kappa x_1} - d_2 e^{-\kappa x_1} + c_1 \kappa e^{-\kappa x_0} + d_1 e^{-\kappa x_0} \\ &= -(c_2 \kappa + d_2) e^{-\kappa x_1} + (c_1 \kappa + d_1) e^{-\kappa x_0}. \end{aligned}$$

Assim, definindo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$F(s, t) = \left(\frac{e^{\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)t} - e^{\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)s}}{\gamma \kappa - \frac{\beta}{2}}, \frac{e^{\left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)t} - e^{\left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)s}}{-\gamma \kappa - \frac{\beta}{2}} \right), \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2,$$

e

$$(p_1, p_2) = ((c_2 \kappa - d_2) e^{\kappa x_1} - (c_1 \kappa - d_1) e^{\kappa x_0}, -(c_2 \kappa + d_2) e^{-\kappa x_1} + (c_1 \kappa + d_1) e^{-\kappa x_0}),$$

resolver o sistema em (2.4), neste caso, equivale a resolver a equação não-linear

$$F(s, t) = (p_1, p_2), \quad (3.2)$$

o que pode ser feito usando o método de Newton, isto é, iterando

$$(s_{n+1}, t_{n+1}) = (s_n, t_n) - J_F(s_n, t_n)^{-1} (F(s_n, t_n) - (p_1, p_2)),$$

onde $J_F(s, t)$ é a matriz Jacobiana de F no ponto (s, t) e com (s_0, t_0) conhecido.

A aplicabilidade do método de Newton para a resolução da equação não-linear (3.2) é assegurada pelo teorema apresentado a seguir.

Teorema 3.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto e convexo e $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $C^1(D)$. Se, para todo $(s, t) \in D$, temos $J_F(s, t)$ não-singular e para alguma norma $\|\cdot\|$ de \mathbb{R}^2 e algum $(s_0, t_0) \in D$ valem as seguintes condições:*

1. *exite $C_1 > 0$, tal que*

$$\|J_F(s_1, t_1) - J_F(s_2, t_2)\| \leq C_1 \|(s_1, t_1) - (s_2, t_2)\|,$$

para todo par $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in D$;

2. *existe $C_2 > 0$ tal que*

$$\|J_F(s, t)^{-1}\| \leq C_2,$$

para todo $(s, t) \in D$;

3. definindo-se

$$C_3 = \left\| J_F(s_0, t_0)^{-1} F(s_0, t_0) \right\|,$$

temos que $C_1 C_2 C_3 < \frac{1}{2}$;

4. definindo-se $R = 2C_1$ temos que

$$\overline{B_R(s_0, t_0)} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(s_0, t_0) - (s, t)\| \leq R\} \subset D;$$

então existe apenas um $(\xi_1, \xi_2) \in \overline{B_R(s_0, t_0)}$ tal que $F(\xi_1, \xi_2) = (p_1, p_2)$ e o método de Newton converge com estimativa de erro dada por

$$\|(\xi_1, \xi_2) - (s_n, t_n)\| \leq R(C_1 C_2 C_3)^{2^n - 1},$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

Uma prova para este teorema pode ser encontrada em [10].

Tomando-se um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ adequado, a norma $\|\cdot\|_2$, definida por

$$\|(s, t)\|_2 = (|s|^2 + |t|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2,$$

e $(s_0, t_0) \in \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq s \leq t \leq x_1\}$, podemos assegurar pelo Teorema 3.1 que o método de Newton aplicado a equação não-linear (3.2) converge para a única solução do sistema.

A dependência contínua da solução da equação não-linear (3.2) em relação aos dados de entrada do Problema 1.2 pode ser verificada usando o Teorema da Função Inversa [9].

Observação 3.1. *Da mesma forma, podemos considerar o Problema 1.2 para fontes da formas $f = C\chi_{[\xi_1, \xi_2]}$ com $C \neq 0$ fixo.*

4. Simulações Numéricas

Para obter dados de entrada para o Problema 1.2 discretizamos o intervalo $[0, 5]$ em 1002 pontos $0 = x_0, x_1, \dots, x_{1000}, x_{1001} = 5$ tais que $x_{i+1} - x_i = h$, para todo $i = 0, \dots, 1001$ e utilizamos o método de Galerkin para obtermos uma aproximação u_h para a solução do Problema 1.1. Assim, obtemos aproximações para $u'(0)$ e $u'(5)$ por

$$u'_h(0) = \frac{u_h(x_1) - u_h(0)}{h} \quad \text{e} \quad u'_h(5) = \frac{u_h(5) - u_h(x_{1000})}{h}$$

Sabemos que, quando o *número de Pécelet*, dado por $\frac{|\beta|h}{\gamma}$, é maior que 2, a aproximação de u pelo método de Galerkin não é confiável, portanto, nas nossas simulações, tomamos valores de α e β respeitando este limite.

Um outro fato que devemos lembrar é que a cada iteração do método de Newton o resultado obtido não vai tender a solução exata f do Problema 1.2, pois os dados de entrada $u'_h(0)$ e $u'_h(5)$ obtidos pelo método de Galerkin são, por sua vez, soluções aproximadas do Problema 1.1, isto é, não são os dados de entrada corretos do Problema 1.2.

A seguir apresentamos duas simulações numéricas onde foram usados parâmetros fictícios para testar o método proposto.

4.1. Reconstruindo uma fonte característica

Para esta simulação numérica, obtemos os dados de entrada $u'_h(0) = 0.119387997616$ e $u'_h(5) = -0.0417667576086$ resolvendo o Problema 1.1 com parâmetros $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.50$ e $\gamma = 0.75$, com condições de bordo $u(0) = u(5) = 0$ e termo fonte $f = \chi_{[1,1.5]}$.

Após 9 iterações, obtemos $\|F(s_9, t_9) - (p_1, p_2)\|_2 < 10^{-16}$ e o método nos deu a solução

$$\bar{f} = \chi_{[1.00361424631, 1.50343624273]}.$$

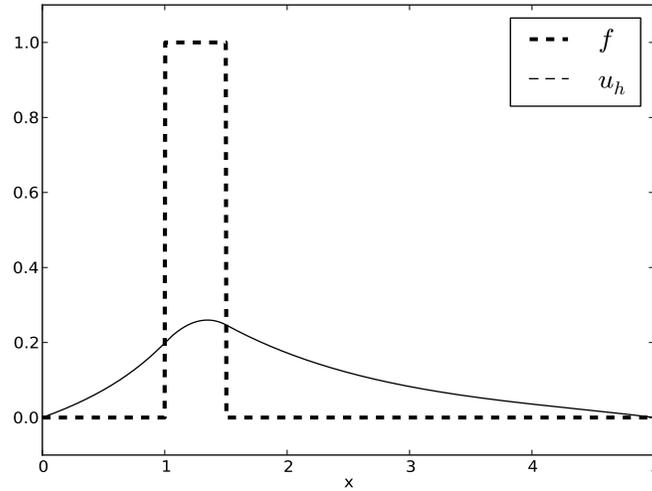


Figura 1: Gráficos de $f = \chi_{[1,1.5]}$ e de u_h obtida para esta fonte.

Na Figura 1 podemos ver os gráficos da função f proposta e u_h obtida pelo método de Galerkin. A Tabela 1 mostra os dados obtidos nas iterações do método de Newton.

4.2. Obtendo uma aproximação por uma função característica

Neste experimento visamos explorar a dependência contínua da solução da equação não-linear (3.2) em relação aos dados de entrada do Problema 1.2 para obter uma aproximação por fonte característica para uma fonte com suporte compacto. Obtemos os dados de entrada $u'_h(0) = 0.633236426522$ e $u'_h(5) = -0.216290556828$ resolvendo o Problema 1.1 com parâmetros $\alpha = 0.25$, $\beta = -0.75$ e $\gamma = 1.0$, com condições de bordo $u(0) = u(5) = 0$ e termo fonte

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{11}{10}(x-2)(x-4) & , \quad \text{se } x \in [2, 4] \\ 0 & , \quad \text{se } x \notin [2, 4] \end{cases}, \quad \forall x \in (0, 5). \quad (4.1)$$

n	s_n	t_n	$\ F(s_n, t_n) - (p_1, p_2)\ _2$
0	0.00000000000	5.00000000000	64.4624026182
1	0.62922673366	3.70123018350	22.0875169921
2	1.10992478833	2.60397962383	6.31463193126
3	1.23642080097	1.92215763709	1.22938016452
4	1.04721611961	1.57603904035	0.17198388291
5	1.00531697895	1.50600312076	0.00544303116
6	1.00361592274	1.50343905630	6.47980399233e-06
7	1.00361424632	1.50343624273	8.46333531145e-12
8	1.00361424631	1.50343624273	6.66278359382e-16
9	1.00361424631	1.50343624273	1.38777878078e-17

Tabela 1: Dados obtidos nas iterações do método de Newton para o problema com fonte $f = \chi_{[1,1.5]}$.

Após 7 iterações, obtemos $\|F(s_7, t_7) - (p_1, p_2)\|_2 < 10^{-14}$ e o método nos deu a aproximação

$$\bar{f} = \chi_{[2.2807889677, 3.74992747306]}$$

para f .

Na Figura 2, podemos ver os gráficos da função f proposta, da u_h obtida pelo método de Galerkin e da \bar{f} . Como podemos ver, a aproximação \bar{f} é bem razoável para a f proposta.

5. Conclusão

A técnica apresentada para resolução numérica do problema inverso de reconstrução de fontes características de intervalos para a equação unidimensional de difusão-advecção forneceu em poucas iterações uma aproximação muito boa para a solução na simulação numérica proposta. Para o caso onde a fonte procurada é uma função contínua de suporte compacto, apresentamos uma simulação que indica a possibilidade de aplicar a mesma técnica para encontrar aproximações na classe das funções características de um intervalo. Sugerimos como trabalhos futuros investigar as extensões desta técnica para problemas em dimensões superiores, incluindo os casos transientes.

Abstract. We consider the inverse source identification for the diffusion-advection one-dimensional equation with constant coefficients from domain boundary data. A variational formulation is presented having the solutions of homogeneous modified Helmholtz equation as test function space. Considering the case which the source is characteristic function of interval we obtain a nonlinear system and we solve it by Newton's method. Two numeric experiments are presented: the first one to illustrate the effectiveness of the proposed method and the other one to indicate its applicability to obtain approximations for compact support sources.

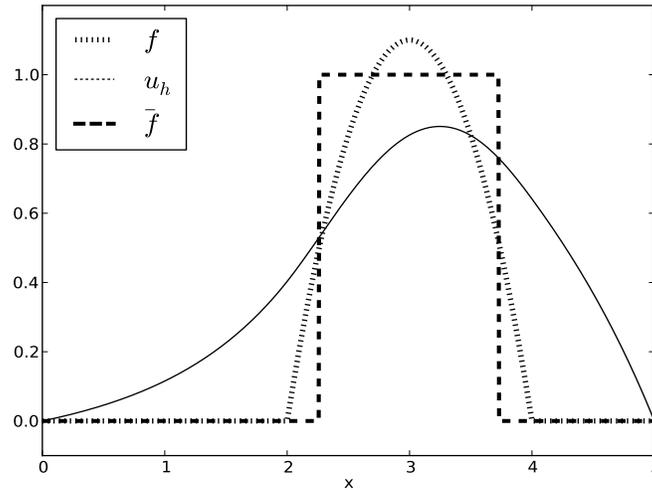


Figura 2: Gráficos de f descrita em (4.1), de u_h obtida com esta fonte e da aproximação \tilde{f} .

Referências

- [1] D.M. de Sousa, N.C. Roberty, Identificação de fontes para a equação unidimensional de difusão-advecção-decaimento, *Anais do XXXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional* (2010) vol. único.
- [2] P. Novikov, “Sur le problem inverse du potentiel”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, v. 18(3) (1938) 165-168.
- [3] A. Rap, L. Elliott, D.B. Ingham, D. Lesnic, X. Wen, An inverse source problem for the convection-diffusion equation, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **16**, No. 2, (2006), 125–150.
- [4] C.J.S. Alves, N.F. Martins, M.J. Colaço, V.M.A. Leitão, H.R.B. Orlande, N.C. Roberty, “Recovering the source term in a linear diffusion problem by the method of fundamental solutions”, *Inverse Problems in Science & Engineering*, **16**, No. 8 (2008), 1005–1021.
- [5] C.J.S. Alves, N.F.M. Martins, N.C. Roberty, Full identification of acoustic sources with multiple frequencies and boundary measurements, *Inverse Problems & Imaging*, **2**, No. 2 (2009), 275–294.
- [6] A. El Badia, T. Ha Duong, Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements, *Inverse Problems*, **14** (1998), 883–891.
- [7] F. Hettlich, W. Rundell, Iterative methods for the reconstruction of inverse potential problem, *Inverse Problems*, **12** (1996), 251–266.

- [8] V. Isakov, "Inverse Source Problems", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 34, AMS, 1989.
- [9] T.M. Apostol, "Mathematical Analysis", Addison-Wesley, Boston, 1974.
- [10] R. Kress, "Numerical Analysis", Springer, New York, 1998.